11. ročník, úloha III . 4 ... *válec versus kvádr* *(6 bodů; průměr ?; řešilo 41 studentů)*

Mějme homogenní válec a homogenní kvádr. Obě tělesa jsou vyrobena ze stejného materiálu a mají stejnou hmotnost. Hodíme je současně vedle sebe na stůl stejnou počáteční rychlostí v_0 (hodíme je rovnoběžně s rovinou stolu, svislá složka rychlosti při dopadu je nulová).

Válec se na počátku neotáčí. Rozhodněte, které těleso se bude pohybovat rychleji, případně diskutujte fáze pohybu, kdyby se jejich vzájemná pozice s časem měnila. Uvažujte pohled jak silový, tak energetický.

Uvažujte, že smyková třecí síla je charakterizovaná pouze koeficientem smykového tření, tj. základní model, kdy smyková třecí síla závisí pouze na normálové přítlačné síle. Valivé tření neuvažujte.

Silový pohled

Silové řešení této úlohy je zřejmé a jak se dalo předpokládat, nečinilo větší problémy.

Kvádr i válec po dopadu na stůl se začnou o stůl třít. Třecí síla, jak bylo uvedeno v zadání, je závislá pouze na hmotnosti předmětů (je rovna mgf) a je tedy pro oba předměty stejná. Je to také jedinná síla (tíha je plně kompenzována normálovou reakcí stolu), která na předměty působí, a tak obě tělesa budou zpomalovat se stejným zrychlením $-gf$. (Pokud se vám to zdá zvláštní, uvědomte si, že platí 1. impulzová věta pro pevné těleso, která říká, že těžiště tělesa se bude pohybovat, jako bychom v něm soustředili celkovou hmotnost tělesa a nechali v něm působit všechny síly na těleso působící, bez ohledu na to, kde tyto síly vlastně na těleso původně působí, matematicky

$$\boldsymbol{a}_T = \frac{1}{M} \sum_i \boldsymbol{F}_i \,,$$

M je hmotnost tělesa, $\boldsymbol{F}_i$ jednotlivé působící síly). To bude pravda nejméně po dobu, po kterou se oba předměty třou o stůl.

Kvádr se bude pohybovat rovnoměrně zpomaleně s okamžitou rychlostí $v = v_0 - gft$, kde t je čas počítaný od dopadu předmětů na stůl, v_0 počáteční rychlost, a nakonec se zastaví — v čase $T_z = v_0/gf$. Kvádr se zřejmě tře o stůl po celou dobu svého pohybu — jinak se totiž, na rozdíl od válce, pohybovat nemůže.

Válec po dopadu také začne třít o stůl. Na rozdíl od kvádru se však začne roztáčet a po jisté době T_k se už bude točit tak rychle, že třecí síla zanikne — v tom okamžiku bude $\omega r = v$, kde ω je jeho úhlová rychlost a v je translační rychlost jeho pohybu. Od tohoto okamžiku válec neprokluzuje, a protože na něj už žádná síla nepůsobí, bude se dále pohybovat konstantní rychlostí.

Shrneme-li dosavadní myšlenky, vidíme, že do času T_k se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí, po T_k si válec zachovává konstantní rychlost, kvádr dále zpomaluje až do zastavení.

Určeme ještě blíže T_k. Rozmyslíme-li si, co říkají 1. a 2. impulzová věta, můžeme psát (uvažujeme moment setrvačnosti válce $1/2mR^2$)

$$v = v_0 - fgt \,, \qquad \text{(1. impulzová věta)}$$

$$mgfR = \frac{1}{2} mR^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \,, \qquad \text{(2. impulzová věta)}$$

tedy

$$\omega = \frac{2gft}{R} \,, \qquad \text{jelikož} \qquad \omega_{t=0} = 0 \,.$$

Z podmínky $\omega R = v$ potom vychází $T_K = v_0/3gf$. Snadno ještě můžeme určit konečnou rychlost válce (dosazením T_k do rovnice pro rovnoměrně zpomalený pohyb). Vyjde $v_k = 2/3v_0$.

Energetický pohled

Energetický pohled na pohyb kvádru je jednoduchý. Na začátku má kvádr kinetickou energii $mv_0^2/2$. V průbehu pohybu pak $mv^2/2$. Rozdíl těchto energií je zcela přeměněn na teplo o velikosti $F_t s = mgfs$, kde s je uražená dráha.

U válce je situace poněkud komplikovanější. Nabízíme vám tento vcelku přirozený pohled Na počátku je kinetická energie válce $1/2 \cdot mv_0^2$. V průběhu pohybu pak $1/2 \cdot mv^2 + 1/2 \cdot I\omega^2$, kde oproti kvádru přibyl člen pro rotační kinetickou energii válce. Měla by platit bilance

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + E_{\mathrm{od}}\,,$$

přičemž E_{od} je energie odebraná válci, která však nebyla přeměněna na jinou mechanickou energii a tudíž se vlastně jedná o teplo, které v průběhu tření vzniká a nakonec uniká do okolí. Zde je potřeba si uvědomit, jak E_{od} spočítat. Vraťme se proto na moment ke kvádru. Tam se teplo rovnalo třecí síle krát dráha, po které *kvádr třel o stůl*. Není důvodu se domnívat, že jinak by tomu mělo být u válce. Musíme si ale všimnout, že tato „třecí“ dráha není shodná s drahou, kterou válec skutečně urazí. Válec totiž dokáže urazit dráhu i bez toho, aby se povrchy o sebe třely — může se otáčet. Pohyb válce v našem příkladě si tak můžeme představit jako složení čistě otáčivého pohybu (otáčení představuje translační rychlost ωR) a „třecího“ translačního pohybu (zbytek do plné okamžité rychlosti v). Z toho uz snadno usoudíme, že „třecí“ dráha bude

$$s_t = \int_0^t (v - \omega R)\mathrm{d}t\,.$$

Vytvořené teplo pak je

$$E_{\mathrm{od}} = F_t\left(\int_0^t v\mathrm{d}t - \int_0^t \omega R\,\mathrm{d}t\right) = F_t s - \int_0^t F_t R\omega\mathrm{d}t$$
$$E_{\mathrm{od}} = F_t s - \int_0^{\varphi} F_t R\mathrm{d}\varphi\,,$$

kde φ je celkový úhel, o který se válec do času t otočí. Podíváme-li se nyní na integrál na pravé straně, určitě si všimneme, že se vlastně jedná o práci, kterou bylo potřeba vykonat právě na roztočení válce, tedy integrál je roven $1/2 \cdot I\omega^2$ ($R\mathrm{d}\varphi$ představuje elementární dráhu, po které působí síla F_t). Dosazením do energetické bilance tak dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + F_t s\,.$$

Pomocí této rovnice už další rozbor uděláme snadno (všimněte si, že tato rovnice je totožná s energetickou rovnicí pro kvádr).

Poslední rovnice se dá odvodit i jinak, přes integraci pohybové rovnice pro těžiště (tečkou nad písmenem značíme derivaci podle času) $ma_T = m\dot{v}_T = F_t$

$$\int_0^t mv_T\dot{v}_T\,\mathrm{d}t = \int_0^t F_t v_T\,\mathrm{d}t$$

$$-\int_{v_0}^{v} m v_T \, \mathrm{d}v_T = \int_0^s F_t \, \mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + F_t s\,.$$

Toto odvození nám ale mnoho neříká o tom, co se ve skutečnosti v systému děje. Proto preferujeme výše uvedený postup. Nicméně stojí za to si uvědomit, že rovnice, kterou jsme takto odvodili, platí pro jakýkoli zpomalený pohyb (posune-li se těleso za působení konstantní odporové síly F podél dráhy s, platí $1/2 \cdot m v_0^2 - 1/2 \cdot m v^2 = F s$, bez obledu na to, zda se těleso silou ještě i roztáčí či ne.)

Václav Porod & Rudolf Sýkora

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.