11. ročník, úloha II . S ... *relace neurčitosti* *(6 bodů; průměr ?; řešilo 29 studentů)*

a) *Před objevem neutronu existovala hypotéza, že jádro s atomovým číslem Z a hmotnostním A se skládá z A protonů a $A - Z$ elektronů. Odhadněte řádově, jakou kinetickou energii by měl elektron, jehož neurčitost polohy by byla srovnatelná s velikostí jádra helia. Jaké důsledky má tento odhad pro zmíněnou hypotézu? Pokud se částice pohybuje rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla, nelze již použít klasický vztah pro kinetickou energii $E_{kin} = p^2/2m$, a místo něj je třeba vzít relativistický vzorec:*

$$E_{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 ,$$

kde m_0 je klidová hmotnost částice.

b) *Uvažujme výše popsaný dvojštěrbinový experiment s elektrony. Vzdálenost štěrbin je $b = 0{,}3\,\mathrm{mm}$ a vzdálenost stínítka od přepážky $l = 1\,\mathrm{m}$. Zjistěte, jakou rychlost musí mít elektrony, aby vzdálenost dvou sousedních interferenčních minim na stínítku, které může být sestaveno například z fotočlánků, byla $d = 0{,}2\,\mathrm{mm}$.*

c) *Představte si, že místo dvou štěrbin uděláme do přepážky pouze jednu. Po průchodu touto štěrbinou se fotony odchylují od původního směru, takže na stínítku uvidíme místo ostrého obrazu štěrbiny rozmazanou světlou skvrnu. Vysvětlete tento jev na základě relací neurčitosti.*

a) Neurčitosti polohy rovné poloměru jádra helia r odpovídá minimální neurčitost hybnosti

$$\Delta p_{\min} = \frac{\hbar}{2r} .$$

Protože má být elektron v jádře vázán, můžeme očekávat, že typická hodnota velikosti hybnosti elektronu bude s $\Delta p_{\min}$ řádově srovnatelná

$$p \approx \Delta p_{\min} .$$

Použijeme-li nyní relativistický vzorec pro kinetickou energii, dostaneme výsledek

$$E_{\mathrm{kin}} = \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{4r^2} + m_0^2c^4} - m_0c^2 .$$

Po dosazení číselných hodnot $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $d \approx 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, vychází kinetická energie elektronu minimálně řádově $1{,}0 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$ neboli $62\,\mathrm{MeV}$, což je mnohonásobně více než jeho klidová energie. Tak rychlý elektron by slabá ani elektromagnetická interakce nebyly schopny udržet, a protože elektron silně neinteraguje, vyletěl by z jádra. (Obhájit korektnost všech těchto úvah by ale nebylo jednoduché, protože tak silně relativistický systém nemůže ve skutečnosti kvantová mechanika popsat a bylo by třeba užít kvantovou teorii pole, která uvažuje i procesy vzniku a zániku částic.) Hypotéza ale vznikla v době, kdy ještě nebyl znám charakter jaderných sil, a byla vyvrácena zcela jiným argumentem. Experimentálně se zjistilo, že jádro dusíku $^{14}_{7}\mathrm{N}$, má celočíselný spin, což by nebylo možné, kdyby se skládalo ze čtrnácti protonů a sedmi elektronů, které mají všechny spin 1/2.

b) Použijeme-li elementární vztah pro úhlovou vzdálenost sousedních interferenčních minim $\Delta\alpha$, známý z vlnové optiky

$$b\Delta\alpha = \lambda , \qquad \Delta\alpha = \frac{d}{l} ,$$

který platí pro $d \ll l$, není obtížné s pomocí de Broglieho hypotézy dospět k výrazu pro rychlost elektronů

$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{hl}{mbd}\,.$$

Číselně vychází $v = 12\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

c) Vysvětlení difrakce světla pomocí relací neurčitosti je jednoduché. Předpokládejme, že přepážka leží v rovině xy a že štěrbina je orientována ve souhlasně s osou y, takže má ve směru osy x průměr d. Ve směru osy z vyšleme k přepážce foton s hybností p. Když foton přepážkou prochází, je lokalizován v oblasti štěrbiny ($\Delta x \approx d$) a získá tím neurčitost hybnosti řádově $\Delta p_x \approx h/d$. Bude-li jeho původní hybnost dostatečně velká, odkloní se typicky o úhel

$$\alpha = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{pd} = \frac{\lambda}{d}\,,$$

což je ve úplném souhlasu s předpovědí vlnové optiky. Je to ale trochu náhoda, protože kdybychom použili jiný řádový odhad, např. $\Delta p_x \approx \hbar/d$, dostali bychom na pravé straně u vlnové délky navíc určitý konstantní faktor, ve zmíněném případě $1/2\pi$. To ale nic nemění na správnosti řádového odhadu úhlu α.

Michal Fabinger

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.