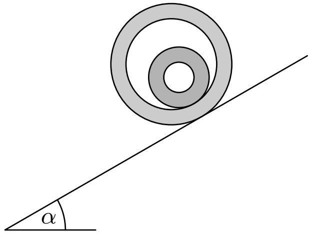
10. ročník, úloha V . 3 ... *velké válení* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 32 studentů)*

Mějme dva duté válce vnějších poloměrů R_1, R_2 a vnitřních poloměrů r_1, r_2 ($r_2 < R_2 < r_1 < R_1$). Válce jsou vloženy do sebe (obr. 1) a navzájem se po sobě valí, ale nekloužou. Vnější válec se začne valit po nakloněné rovině s úhlem α. Jakého zrychlení celá soustava dosáhne?

Nad rámec zadání se můžete pokusit popsat pohyb jednotlivých válců. Hmotnosti válců jsou M_1, M_2 a materiál válce můžeme považovat za homogenní. Změní se řešení výrazně pro tři válce?



Obr. 1

Označme h převýšení nakloněné roviny a α velikost úhlu, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou. Označme ω_1 úhlovou rychlost rotace vnějšího válce a ω_2 úhlovou rychlost rotace vnitřního válce; vzhledem k tomu, že se válce po sobě pohybují bez prokluzování, bude platit

$$v = R_1\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{v}{R_1}\,,$$
$$r_1\omega_1 = R_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{R_2}\omega_1 = \frac{r_1 v}{R_1 R_2}\,.$$

Kinetická energie soustavy se skládá z translační a rotační složky

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\,.$$

Vypočteme moment setrvačnosti např. J_1 vnějšího dutého válce $J_1 = J_{1,0} - J_{1,i}$, kde $J_{1,0}$ je moment setrvačnosti celého válce (tj. bez dutiny) a $J_{1,i}$ je moment setrvačnosti válce, který by vyplnil dutinu, tedy

$$J_{1,0} = \frac{1}{2}\left(M_1\frac{R_1^2}{R_1^2 - r_1^2}\right)R_1^2\,,$$
$$J_{1,i} = \frac{1}{2}\left(M_1\frac{r_1^2}{R_1^2 - r_1^2}\right)r_1^2\,,$$
$$J_1 = J_{1,0} - J_{1,i} = \frac{1}{2}M_1(R_1^2 + r_1^2)\,.$$

Výrazy v závorkách představují hmotnosti plných válců, které jsou samozřejmě jiné než M_1. Celková kinetická energie soustavy tedy bude

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{4}M_1(R_1^2 + r_1^2)\omega_1^2 + \frac{1}{4}M_2(R_2^2 + r_2^2)\omega_2^2\,,$$
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + \frac{1}{4}M_1\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2}v^2 + \frac{1}{4}M_2\frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2R_2^2}v^2.$$

Pohybuje-li se soustava bez tření, bude na úpatí nakloněné roviny podle zákona zachování energie platit $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = (M_1 + M_2)gh$. Je-li konečná rychlost soustavy v (předpokládáme, že se soustava pohybuje rovnoměrně zrychleně bez případných kmitů malého válce uvnitř velkého), bude pro její zrychlení platit

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}\,.$$

Porovnáním vztahu pro energie vyjádříme

$$v^2 = \frac{(M_1 + M_2)gh}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2\frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2}} .$$

Nyní již zbývá jen dosadit do vztahu pro zrychlení, $s = h/\sin\alpha$, tedy výsledný vztah bude

$$a = \frac{\frac{1}{2}(M_1 + M_2)g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2\frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2}} .$$

Bude-li válců více, změní se výsledný vztah tak, že v čitateli bude součet hmotností všech válců a ve jmenovateli bude několik dalších členů za „čtvrtinami“ vhodně pronásobenými poloměry válců. Tedy například pro tři válce

$$a = \frac{\frac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3)g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{4}M_1\frac{R_1^2 + r_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{4}M_2\frac{(R_2^2 + r_2^2)r_1^2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{1}{4}M_3\frac{(R_3^2 + r_3^2)r_1^2 r_2^2}{R_1^2 R_2^2 R_3^2}} .$$

Daniel Kráľ

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.