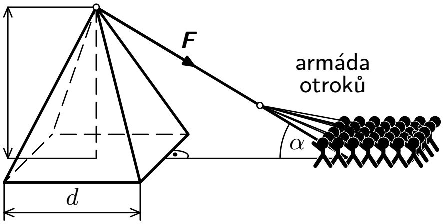
10. ročník, úloha V . 2 ... *vykradená pyramida* *(4 body; průměr ?; řešilo 44 studentů)*

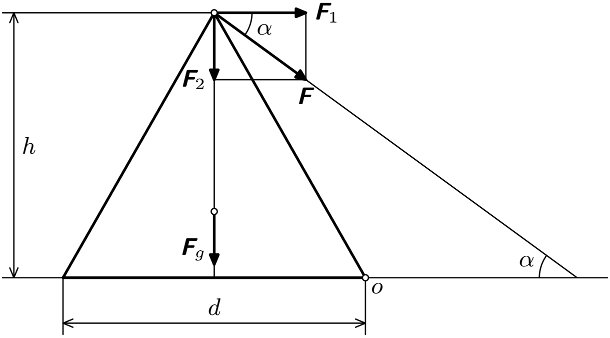
Jistý duševně chorý faraón si před mnoha tisíci lety nechal vytesat mnoha tisíci otroků z jednoho kusu mohutné skály pyramidu. Starověcí zloději o dvě dynastie později chtěli pyramidu vyloupit, leč nenašli vchod, a tak se rozhodli, že se pokusí pyramidu převrhnout. Do její špičky zaklesli pevný kruh, jímž provlékli ještě pevnější lano. Za lano pak zapřáhli organizovanou skupinu otroků táhnoucích směrem od pyramidy kolmo ke dvěma hranám podstavy (obr. 1). Podaří se otrokům pyramidu převrhnout, když jich bude dostatečně mnoho, nebo ji po písku jen kus popotáhnou?



Obr. 1

Okolní písek je dokonale udusán minulými generacemi vykradačů hrobek, kteří už celá staletí obhlíželi, kudy pyramidu vykrást, takže se pyramida do písku nebude bořit. Hmotnost pyramidy je M, koeficient statického smykového tření je μ. Pyramidu považujte za jehlan (pohřební dutina je velmi malá, protože vládce je celý seschlý).

Úlohu je třeba rozdělit na určení dvou podmínek – jak velkou sílu budeme potřebovat pro překlopení pyramidy a při jak velké síle se pyramida ještě nezačne posouvat. Spojením obou podmínek obdržíme řešení.



Obr. 2

Působení síly $\boldsymbol{F}$ na pyramidu můžeme nahradit působením sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, jejichž velikosti jsou $F_1 = F\cos\alpha$ a $F_2 = F\sin\alpha$ (viz obr. 2). Pro úplnost dodejme, že gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ má působiště v těžišti pyramidy, tj. v $\frac{1}{4}$ výšky!

Tření vykompenzuje působení síly F_1 do maximální velikosti $F_t = \mu(F_g + F_2)$. Položme první podmínku jako $F_1 < F_t$. A tedy po úpravě snadno dostáváme

$$F < \frac{\mu F_g}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\,. \tag{1}$$

Toto je podmínka pro velikost síly plynoucí ze tření s podložkou taková, aby se pyramida neposunula. Teď určíme, jak velikou sílu budeme doopravdy potřebovat.

Vyjděme z momentů působících sil vzhledem k ose otáčení (hrana pyramidy)

$$M_1 = F_1 h\,, \qquad M_2 = F_g\frac{d}{2} + F_2\frac{d}{2}\,.$$

Z obrázku je jasné, že chceme, aby $M_1 > M_2$, a proto

$$F_1 h > F_g \frac{d}{2} + F_2 \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad F > \frac{\frac{1}{2} F_g d}{h \cos\alpha - \frac{1}{2} d \sin\alpha} \,. \tag{2}$$

A nyní snadno obě podmínky (1) a (2) spojíme do jedné. Po jednoduchém vykrácení a upravení dostáváme výsledek

$$\mu > \frac{d}{2h} \,.$$

Na závěr ještě proveďme diskusi. Je třeba si uvědomit, jaké postupy a úpravy jsme použili, zda byly ekvivalentní a či jsme nepřehlédli jiné možnosti řešení.

To, co jsme u vztahu (1) označili jako „úpravy“, je předpoklad, že $\cos\alpha - \mu \sin\alpha > 0$. Diskutujme, co se stane, když je zde znaménko opačné. Tím se změní znaménko nerovnosti ve vztahu (1) a každý snadno nahlédne, že je tato podmínka splněna pro každou sílu F (resp. její velikost). Když je $\mu \geq \operatorname{cotg}\alpha$, pyramida se neposune ani při „sebevětší“ síle F.

Podobně ve vztahu (2) jsme předpokládali, že je $h \cos\alpha - d \sin\alpha / 2 > 0$. To je pro naši úlohu splněno vždy. Upravíme-li tento vztah na tvar $2h/d > \operatorname{tg}\alpha$, vidíme, že levá strana je tangens úhlu mezi stěnou a podstavou pyramidy, a jelikož otroci stojí venku, je tento vždy větší než $\operatorname{tg}\alpha$.

Tomáš Drbohlav

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.