10. ročník, úloha IV . S ... *Slunce a meteoroidy* *(6 bodů; průměr ?; řešilo 45 studentů)*

Ověřte hypotézu, že zdrojem energie Slunce jsou meteoroidy dopadající na jeho povrch. Určete, kolik meteoroidů (jejich hmotnost) by muselo dopadnout na Slunce za 1 rok, aby se energeticky pokryl zářivý výkon Slunce $L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W.

Předpokládejte, že se vyzáří veškerá kinetická energie meteoroidů (ve skutečnosti se část této energie spotřebuje na ohřev Slunce a na změnu celkové potenciální energie Slunce). Poloměr Slunce je $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8$ m, hmotnost $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Určete, o kolik by se za rok změnila velká poloosa a doba oběhu Země díky nárůstu hmotnosti Slunce. Předpokládejte, že se hmotnost Slunce mění skokově a že před touto změnou obíhala Země kolem Slunce po kružnici o poloměru $a = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m s dobou oběhu $T = 1$ rok. Při výpočtu použijte přibližný vztah $(1 + x)^k \approx 1 + kx$, který platí pro $0 \leq x \ll 1, k \in \mathbb{N}$. Dnes je známa astronomická jednotka s přesností na 2 metry. Bylo by možné tuto změnu naměřit?

Abychom mohli odhadnout kinetickou energii E_k meteoroidů dopadajících na povrch Slunce, musíme si uvědomit, odkud tyto meteoroidy pocházejí. Vzhledem k tomu, že Slunce svítí dlouhou dobu, nemohou být z vnitřní části Sluneční soustavy. Jejich dráha bude podobná dráze komet. Ta je, u komet z okraje Sluneční soustavy, téměř parabolická. Budeme předpokládat, že meteoroidy dopadají na Slunce z velké vzdálenosti (nekonečna) a že na začátku měly velmi malou rychlost. Tomu odpovídá nulová celková energie E (parabolická dráha). Pro kinetickou a potenciální energii E_p meteoroidu na povrchu Slunce tak dostáváme $E = E_k + E_p = 0$, neboli

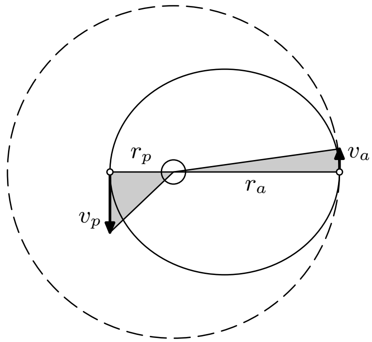
$$E_k = -E_p = \frac{\varkappa m M_\odot}{R_\odot}\,,$$

kde jsme využili vztah pro potenciální energii uvedený ve 4. kapitole a kde m je hmotnost meteoroidu. Pokud jsou meteoroidy jediným zdrojem energie Slunce, musí příliv jejich kinetické energie odpovídat vyzářenému výkonu $L_\odot$ (má-li být Slunce stabilním zdrojem)

$$L_\odot = \frac{\varkappa M_\odot}{R_\odot}\frac{\Delta m}{\Delta t}\,,$$

kde Δm je hmotnost meteoroidů spadlých na Slunce za čas Δt. Uvažujeme-li jeden rok (tedy $\Delta t = 3{,}156 \cdot 10^7$ s), dělá to $\Delta m = 6{,}3 \cdot 10^{22}$ kg.

Nyní se zabývejme tím, co se stane se Zemí, změní-li se hmotnost Slunce skokově o tuto hodnotu. Na začátku obíhá Země kolem Slunce po kružnici o poloměru a kruhovou rychlostí $v_k = \sqrt{\varkappa M_\odot / a}$. Zvětší-li se hmotnost Slunce, pak tato rychlost už nebude dostatečná k tomu, aby Země dále obíhala po kružnici. Země se začne pohybovat po elipse, v jejímž ohnisku bude Slunce. V místě, kde se nachází Země v okamžiku změny hmotnosti Slunce, se pak bude nacházet afélium (jediné dva body na eliptické dráze, ve kterých je průvodič kolmý na směr rychlosti planety, odpovídají perihéliu a aféliu, viz obr. 1). Známe tedy polohu r_a a rychlost v_a Země v aféliu: $r_a = a$, $v_a = v_k$. Abychom určili velkou poloosu a' nové elipsy, stačí najít vzdálenost r_p perihélia od



Obr. 1

Slunce. Tu určíme ze zákona zachování energie a z II. Keplerova zákona

$$\frac{1}{2}v_p^2 - \varkappa\,\frac{M_\odot + \Delta m}{r_p} = \frac{1}{2}v_a^2 - \varkappa\,\frac{M_\odot + \Delta m}{r_a}\,, \qquad r_p v_p = r_a v_a\,.$$

Poslední vztah opravdu představuje II. Keplerův zákon, neboť, jak již bylo řečeno, jsou rychlosti v_a, v_p v aféliu a perihéliu kolmé na průvodič. Za malý čas $\mathrm{d}t$ tedy průvodič opíše malý pravoúhlý trojúhelník o ploše $S_a = r_a v_a \mathrm{d}t/2$ a $S_p = r_p v_p \mathrm{d}t/2$. Z těchto dvou rovnic vyloučíme v_p, pro r_p tak dostaneme kvadratickou rovnici. Jedno její řešení je $r_p = r_a = a$. To však není zajímavé, neboť odpovídá počáteční poloze. Druhé řešení má tvar $r_p = aM_\odot/(M_\odot + 2\Delta m)$. Pro změnu velké poloosy tak dostáváme

$$\Delta a = a' - a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) - a = \frac{1}{2}(r_p - a) = -a\frac{\Delta m}{M_\odot + 2\Delta m} \approx -a\frac{\Delta m}{M_\odot}\,.$$

Číselně pak $\Delta a = -4{,}8\,\mathrm{km}$, což je změna, které bychom si určitě všimli.

Pro výpočet změny oběžné doby použijeme III. Keplerův zákon. Protože se však mění hmotnost centrálního tělesa, musíme použít jeho obecnější verzi: $\varkappa M T^2 = 4\pi^2 a^3$. V našem případě

$$\varkappa(M_\odot + \Delta m)(T + \Delta T)^2 = \varkappa M_\odot\left(1 + \frac{\Delta m}{M_\odot}\right)T^2\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2 \approx$$
$$\approx \varkappa M_\odot T^2\left(1 + \frac{\Delta m}{M_\odot} + 2\frac{\Delta T}{T}\right) = 4\pi^2(a + \Delta a)^3 \approx 4\pi^2 a^3\left(1 + 3\frac{\Delta a}{a}\right)\,,$$

kde jsme použili přibližný vztah uvedený v zadání a zanedbali člen s $\Delta m \Delta T$, neboť obsahuje součin dvou relativně malých čísel (vůči $M_\odot$ a T). Samozřejmě toto zjednodušení není nutné provádět, výsledný vztah však bude o trochu složitější. Nyní už není těžké vyjádřit změnu oběžné doby Země kolem Slunce

$$\Delta T \approx \frac{T}{2}\left(3\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta m}{M_\odot}\right) \approx -2\frac{\Delta m}{M_\odot}T\,,$$

číselně $\Delta T = -2{,}0\,\mathrm{s}$.

Alexander Kupčo

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.