10. ročník, úloha III . E . . . *optické vlastnosti vody* *(7 bodů; průměr ?; řešilo 51 studentů)*

Tentokrát je zadání velmi stručné změřte index lomu obyčejné pitné vody. Současně si přečtěte autorské řešení úlohy I . 6 a pokuste se realizovat jen jednu metodu, ale zato co nejprecizněji.

Obecný teoretický úvod společný všem metodám

Nechceme opisovat učebnice, avšak na základních pojmech a vztazích je nutné se v teorii dohodnout.

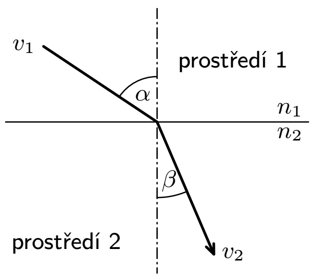
Měřit budeme absolutní index lomu vody, který je definován poměrem $n = c/v$, kde c je rychlost světla ve vakuu, v je rychlost světla ve vodě.

Základním fyzikálním vztahem popisujícím lom z prostředí *1* do prostředí *2* je tzv. Snellův zákon (viz obr. 1)

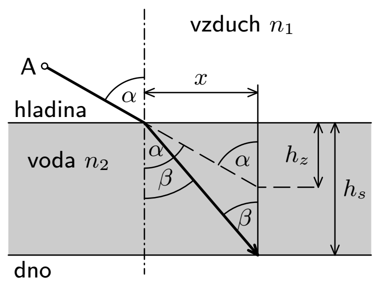
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}\,,$$

kde α je úhel dopadu na rozhraní, β je úhel lomu, v_1 (resp. v_2) je rychlost světla v prostředí *1* (resp. *2*), n_1 (resp. n_2) je index lomu prostředí *1* (resp. *2*).

Na vodorovné dno nádoby s vodou položme předmět a pozorujme jej z bodu A nad hladinou (obr. 2). Vzdálenost od hladiny, ve které by předmět musel ležet, abychom jej po vypuštění vody pozorovali z bodu A na témže místě, jako když v nádobě byla voda, označme h_z. Skutečnou hloubku předmětu označme h_s.



Obr. 1



Obr. 2

Podle obrázku 2 platí

$$\frac{x}{h_Z} = \sin\alpha\,, \qquad \frac{x}{h_S} = \sin\beta\,.$$

Odtud snadno plyne

$$\frac{h_S}{h_Z} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}\,, \tag{1}$$

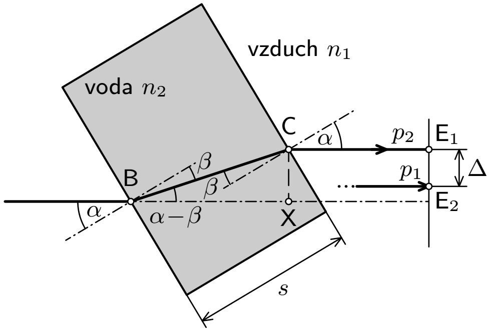
přičemž poslední rovnost plyne ze Snellova zákona a n_2 je index lomu vody, n_1 index lomu vzduchu. Nakonec uveďme, co nám prorokuje teorie – ta říká, že libovolnou metodou bychom měli naměřit $n = n_{\text{vody}} \in \langle 1{,}329; 1{,}344\rangle$ pro vlnové délky viditelného světla. V dalším výkladu budeme občas využívat znalosti indexu lomu vzduchu n_1. Protože n_1 je velmi blízký jedné (např. pro žluté sodíkové světlo se uvádí $n_1 = 1{,}000292$), dopustíme se zaokrouhlením $n_1 \doteq 1$ chyby řádově mnohem menší, než bude systematická chyba našich měření.

Uvádíme 4 metody měření, z nichž první je zpracována pořádně a další jsou zkrácené.

Metoda 1 (Měření, které vejde do dějin)

Teorie

Laserové ukazovátko namíříme kolmo na zeď a do cesty mu postavíme obdélníkovou nádobu, zatím bez vody (obr. 3). Na zeď nalepíme milimetrový papír. Bod, do něhož dopadá střed paprsku, označíme křížkem. Pak nalijeme do nádoby vodu a na milimetrovém papíře vyznačíme novou polohu paprsku.



Obr. 3. Půdorys

Vzdálenost obou značek na milimetrovém papíře označíme $\Delta = |\mathsf{E}_1\mathsf{E}_2|$. Z rovnoběžnosti stěn nádoby plyne rovnoběžnost paprsku p_1 vycházejícího z prázdné nádoby s paprskem p_2 z plné nádoby. Laskavý (i nelaskavý) čtenář sám odvodí, že průchod paprsku stěnami nemá žádný vliv na veličinu Δ. Určeme obecně Δ bez uvažování stěn nádoby (viz obr. 3). Vnitřní šířka nádoby je s. Z pravoúhlého trojúhelníka BXC je $\Delta/s = \sin(\alpha-\beta)$, a tedy $\beta = \alpha - \arcsin(\Delta/s)$. Ze Snellova zákona

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha - \arcsin\dfrac{\Delta}{s}\right)},$$

kde položíme $n_1 = 1$, jak odůvodněno výše.

Naměřené hodnoty

Měření	α/grad	Δ/cm	n	Δn
1	44	2,2	1,53	0,06
2	54	2,8	1,53	0,06
3	52	2,7	1,54	0,05
4	39	1,5	1,36	0,23
5	58	4,1	1,99	0,40

Šířka nádoby byla $s = (8{,}5 \pm 0{,}3)$ cm.

Střední hodnota $\overline{n} = 1{,}59$, průměrná chyba $\overline{\Delta n} = 0{,}16$. Systematická chyba je způsobena těmito vlivy: chyba při měření Δ na milimetrovém papíře je ± 2 mm, chyba při měření α je $\pm 0{,}5$ grad, chyba při měření vzdálenosti stěn nádoby je ± 3 mm. Odtud $\sigma_{\mathrm{sys}} = 0{,}15$.

Diskuse

Námi naměřené hodnoty neodpovídají tabulkovým údajům. Příčinu této skutečnosti spatřujeme v nedokonalé rovnoběžnosti stěn nádoby, kterážto skutečnost unikla při měření naší pozornosti. Velká chyba plyne také z obtížného určení středu dopadajícího paprsku na milimetrový papír, neboť se paprsek při průchodu nádobou a vodou značně rozptyluje. Chyba měření úhlu je proti těmto chybám zanedbatelná. Měření č. 5 je patrně hrubou chybou (způsobenou spícími experimentátory). Korekci na nerovnoběžnost stěn zpřesněním teorie zřejmě není možné provést. Proto křivost stěn zahrneme do celkové systematické chyby, kterou odhadneme na $\delta_{\mathrm{sys}} = 0{,}3$.

Závěr

Realizace této metody v našich podmínkách nedává výsledky s uspokojivou přesností. Kdybychom měli nádobu, jejíž stěny bychom mohli považovat za rovné a rovnoběžné s dostatečnou přesností, dosáhli bychom uspokojivé přesnosti měření.

Metoda 2 (Bystrozraký a Krátkozraký)

Teorie

Do kýblu nalijeme do výšky H ode dna vodu a na dno položme minci. Identickou mincí pohybujme ve vertikálním směru ve vzdušném prostoru stranou kýblu, dokud nejsme přesvědčeni, že obě mince jsou stejně hluboko. Následně změříme hloubku mince vedle kýblu. Podle vztahu (1) je

$$n_2 = \frac{h_S}{h_Z} n_1 \approx \frac{h_S}{h_Z} ,$$

kde h_S je skutečná hloubka mince v kýblu, h_Z vzdálenost mince vedle kýblu od hladiny, n_2 je index lomu vody, n_1 vzduchu.

Obávali jsme se, že měření zdánlivé hloubky bude do značné míry subjektivní, proto jsme je provedli každý zvlášť desetkrát a výsledky jsme zpracovali také samostatně.

Měření všech délek jsme prováděli pravítkem s dílkem stupnice 1 mm.

Naměřené hodnoty

V obou případech byla skutečná hloubka $h_S = (20{,}5 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$.

Martinův výsledek: $n_2 = 1{,}37 \pm (0{,}04 + \text{chyba systematická})$.

Matoušův výsledek: $n_2 = 1{,}60 \pm (0{,}03 + \text{chyba systematická})$.

Diskuse

Větší přesnosti odhadu dosáhneme, pokud odhadujeme, kdy se nám zdá mince býti na dně nádoby. Měření vyžaduje jistou zkušenost experimentátora v odhadování. Všimněte si, že nám vyšly každému výrazně jiné výsledky. Právě jsme se v praxi setkali s chybou osobní systematickou. (Pozn. M. J.: není to chyba moje – třeba že bych snad šilhal –, nýbrž chyba metody.)

Porovnáme-li naměřené hodnoty s tabulkovým údajem $n \approx 1{,}33$, zjistíme, že systematická chyba bude značná – aspoň 0,3.

Závěr

Metodou 2 lze změřit index lomu vody s nevalnou přesností, zvláště má-li experimentátor špatný odhad pro malé vzdálenosti. Měření je hodně subjektivní, a proto může být velmi nepřesné.

Metoda 3 (Odraz úplný, naprostý a totální)

Teorie

Při průchodu světla z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího se paprsek láme od kolmice. Existuje tzv. mezní úhel dopadu γ'_m, pro který je úhel lomu $\delta = 90^\circ$. Pro úhel dopadu $\gamma > \gamma'_m$ se paprsek již neláme, nýbrž úplně odráží od rozhraní.

Postup měření

Do průhledné nádoby s alespoň jednou svislou rovnou stěnou nalijeme vodu do vhodné výšky. Ze strany pak svítíme laserovým ukazovátkem pod úhlem α. Světlo se nejprve láme ze vzduchu do stěny nádoby (bod A), pak ze skla do vody v bodě B, a nakonec z vody do vzduchu (bod C) – viz obr. 4.

Nyní ukážeme, že namísto dvou lomů v bodě A a B stačí uvažovat pouze jeden lom, a to ze vzduchu přímo do vody. Zdůrazněme, že se nejedná o žádné „zanedbání“.

Nechť n_1 je index lomu vzduchu, n_2 je index lomu skla, n_3 je index lomu vody, α je úhel dopadu na stěnu nádoby, β je úhel lomu ze vzduchu do skla a úhel dopadu ze skla na rozhraní sklo-voda, γ je úhel lomu ze skla do vody.

Ze Snellova zákona plyne

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}\,, \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{n_3}{n_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_3}{n_1}\,, \tag{2}$$

což je však totéž, jako kdybychom napsali Snellův zákon pro rozhraní vzduch-voda, bez uvažování skleněné stěny. Pro výpočet úhlu γ tedy nemusíme existenci stěny uvažovat (to však neplatí, pokud úhly určujeme pomocí měření vzdáleností!).

Na obr. 4 je znázorněna nádoba s vodou – řez je totožný s rovinou, v níž je paprsek. Vidíme, že platí $\gamma'_m = 90^\circ - \gamma$. Ze Snellova zákona v bodě C platí

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin\gamma'_m} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}\,. \tag{3}$$

Index lomu vzduchu lze nahradit jedničkou, jak řečeno výše. Z rovnic (2), (3) po úpravách plyne

$$n_3 = \sqrt{1+\sin^2\alpha}\,. \tag{4}$$

Index lomu vody n_3 ve vztahu (4) závisí pouze na prvním úhlu dopadu α, na ničem jiném. Stačí proto měřit pouze úhel α.

Naměřené hodnoty

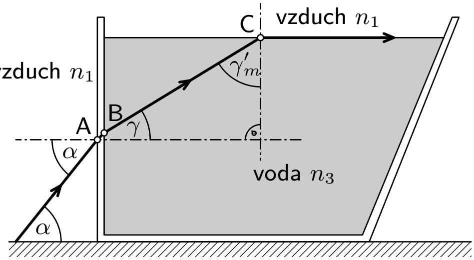
Střední hodnota $\overline{n} = 1{,}320$.
Chyba standardní $\sigma(n) = 0{,}004$, k hrubé chybě nedošlo.
Chyba směrodatná $\sigma(\overline{n}) = 0{,}001$.
Chyba systematická $\sigma_{\mathrm{sys}} = 0{,}03$.
Index lomu $n = 1{,}32 \pm 0{,}03$.

Diskuse

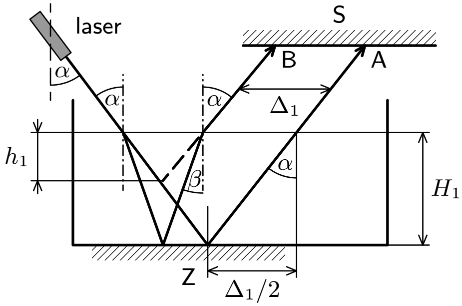
Při prvním měření jsme zjistili, že je těžké najít úhel, kdy dochází k úplnému odrazu. Proto jsme zavedli jisté korekce představující úhel lomu φ do vzduchu. Tento úhel jsme určovali měřením vzdálenosti v pravoúhlém trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že největší odchylka φ od 90° byla 1°, jsou tyto chyby zanedbatelné ve srovnání s ostatními systematickými chybami. Systematická chyba měření klesá s rostoucími rozměry nádoby, neboť pak lze přesněji určit mezní úhel.

Závěr

V rámci chyby odpovídá změřený index lomu tabulkové hodnotě. Tato metoda je nejpřesnější z námi použitých.



Obr. 4



Obr. 5

Metoda 4 (Odraz v hloubi hrnce)

Teorie

Kromě zákona lomu (viz obecná teorie v úvodu) použijeme ještě zákon odrazu, který říká, že úhel odrazu má stejnou velikost jako úhel dopadu.

Do hrnce hlubokého a širokého (bystrozrakého už nikoliv) umístíme na dno rovinné zrcátko Z vodorovně (obr. 5), aby se během pokusu nepohnulo. Do hrnce nalijeme do výšky H_1 vodu tak, aby zrcátko bylo pod vodou, ale nádoba nebyla příliš plná.

Pod úhlem α nasměrujeme do hrnce laserový paprsek, aby po odrazu od zrcátka dopadl na stínítko S tvořené milimetrovým papírem. Když v hrnci nebyla ještě žádná voda, dopadl paprsek odražený od zrcátka do bodu A. V hrnci s vodou však došlo též k lomu a paprsek dopadl až do bodu B. Označme $|\mathsf{A}B| = \Delta_1$. Platí (viz obr. 5)

$$\frac{\Delta_1}{2}\frac{1}{H_1 - h_1} = \operatorname{tg}\alpha\,, \tag{5}$$

kde H_1 je skutečná hloubka nádoby (od hladiny k zrcadlu) a h_1 je zdánlivá hloubka.

V úvodní teorii jsme však odvodili vztah pro skutečnou a zdánlivou hloubku

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{n_{\text{vody}}}{n_{\text{vzduchu}}} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{H_1}{n_{\text{vody}}}\,, \tag{6}$$

jestliže položíme $n_{\text{vzduchu}} = 1$, což při naší přesnosti smíme. Dosazením (6) do (5) a jednoduchou úpravou obdržíme

$$\Delta_1 = 2H_1\left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right)\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Nyní dolijme do nádoby ještě nějakou vodu a posun paprsku do bodu C na stínítku popišme vzdáleností $|\mathsf{A}C| = \Delta_2$. Pro Δ_2 platí obdobný vztah jako v předchozím případě pro Δ_1, pouze nahradíme H_1 vzdáleností nové hladiny od zrcadla H_2.

Měřit budeme vzdálenost bodů B a C, tj. polohu paprsku na milimetrovém papíře pro dvě různé hloubky H_1, H_2. Platí zřejmě

$$\Delta = |\mathsf{B}C| = \Delta_2 - \Delta_1 = 2(H_2 - H_1)\left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right)\operatorname{tg}\alpha,$$

odkud

$$n_{\text{vody}} = \frac{2(H_2 - H_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2(H_2 - H_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \Delta}\,.$$

Úhel α jsme měřili úhloměrem (v gradech), délky H_1, H_2 pomocí pravítka, Δ pomocí milimetrového papíru.

Naměřené hodnoty

Pro celkovou časovou složitost pokusu jsme provedli jen 2 měření. Systematickou chybu odhadujeme na $\sigma_{\text{sys}} = 0{,}1$ (nevodorovné zrcátko, určení středu paprsku, měření úhlu ($\pm 0{,}5$ grad), měření hloubky (± 1 mm)).

Index lomu vody $n = 1{,}44 \pm 0{,}12$.

Diskuse

Systematická chyba měření je poměrně velká; je způsobena zejména nevodorovností zrcátka v naší konkrétní realizaci. Tabulkové hodnotě však výsledek v rámci chyby odpovídá. Chybu lze zmírnit použitím hlubšího a širšího hrnce, neboť Δ je úměrné H_2 a $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Závěr

Výsledek měření odpovídá teorii.

Celkový závěr

Nejpřesněji se nám povedlo realizovat metodu 3. Měli jsme přitom jistou výhodu, že jsme mohli použít (a použili) laser. Metod, jak změřit index lomu, existuje mnoho desítek a nemohli jsme pochopitelně zkoušet všechny. Chtěli bychom však říci, že laser rozhodně k pokusu potřeba nebyl. Naši řešitelé se s problémem zdroje vyrovnali celkem třemi různými způsoby

a) vytvořili si dobrý zdroj z nějakého svítidla (pomocí clony jste vyrobili zdroj bodový),
b) sehnali si laser jako my,
c) vymysleli pokus tak, aby bodový zdroj nebyl potřeba (pozorovali pod nějakým úhlem značku v hrnci apod.).

Z autorského řešení metody 1 a obecného úvodu si můžete vzít poučení, co patří do jednotlivých částí vyhodnocení měření, např. jak má vypadat diskuse.

Martin Krsek & Matouš Jirák

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.