

**10. ročník, úloha III. 2 ... dopravní přestupek** (3 body; průměr ?; řešilo 74 studentů)

Jede si tak jednou pan Doppler po městě a co nevidí. Zastavuje ho vozidlo policie a příslušník povídá „Pane řidiči, jste si vědom toho, že jste jel na červenou?“

„Nikoliv. Když jsem projížděl kolem semaforu, tak jsem viděl zelenou. Tím jsem si naprosto jist,“ odpovídá pan Doppler.

„Tak v tom případě vám musím dát pokutu za rychlou jízdu!“

Kolik zaplatil pan Doppler a proč, jsou-li sazby 1 Kč za  $1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  přes povolený limit  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ve městě?

Pokud chceme problému přijít na kloub, musíme předpokládat, že policista viděl červenou v tentýž okamžik, kdy pan Doppler viděl zelenou. A dále vzhledem ke změně frekvence světla musíme uvažovat relativistické vztahy pro Dopplerův jev. Zavedeme si dvě souřadné soustavy. Souřadnou soustavu semaforu S1 (v ní se nachází i policista) a soustavu Dopplerova auta S2. Tyto souřadné soustavy se přibližují rychlostí  $v$ .

Co vidí pozorovatel v S1? Semafor vyšle 1 vlnu červeného světla rychlostí  $c$  za čas  $T_c = 1/f_c$ .

V soustavě S2, z hlediska pana Dopplera, se ale přibližuje semafor rychlostí  $v$ . Z toho, že v S1 i v S2 se světlo pohybuje rychlostí  $c$ , lze odvodit, že v S2 vyšle semafor 1 vlnu za čas

$$T = \frac{T_c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(dilatace času). Jelikož se semafor přibližuje rychlostí  $v$ , je vlnová délka přijímaného světla a jeho frekvence

$$\lambda_z = (c - v)T = \frac{c}{f_c} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad f_z = f_c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Vyjádříme si rychlost  $v$

$$v = c \frac{f_z^2 - f_c^2}{f_z^2 + f_c^2} \doteq 0,22c = 237 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1},$$

což odpovídá pokutě 237 mil. Kč.

Tento výsledek je možno považovat za správný, pokud ovšem uvedeme podmínky, za kterých platí.

- a) Především jsme jaksi mimoděk předpokládali, že semafor stojí přímo ve směru jízdy pana Dopplera. Jelikož ke srážce semaforu a pana Dopplera nedošlo, musíme předpokládat, že se pan Doppler podíval na semafor ve vzdálenosti minimálně srovnatelné s jeho výškou (či horizontální vzdáleností), neboť v případě, že pan Doppler projíždí pod semaforem a dívá se přitom na něj, nemůže už docházet k podélnému Dopplerovu jevu. Dojde zato k příčnému Dopplerovu jevu způsobenému dilatací času

$$f' = f_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

což v našem případě znamená, že pan Doppler uvidí červenou, a to ještě o něco tmavší než je v S1.

- b) Ve výpočtu jsme použili velikost rychlosti světla ve vakuu. Při správném zaokrouhlení nebude ani zemská atmosféra na obtíž.

Nakonec je třeba učinit poznámku k přesnosti výpočtu.

Policista udělující pokutu může znát frekvenci (vln. délku) semaforu s poměrně velkou přesností. Pokud však pan Doppler řekne, že viděl zelenou, pak lze výši pokuty pouze odhadnout nebo učinit výpočet pro pana Dopplera co nejpříznivější a použít v něm frekvenci nějaké žlutozelené barvy. V každém případě je zbytečné odečíst oněch 60 Kč, obzvláště, když uvážíme, že se incident odehrál na vzduchu, a ne ve vakuu.

Je tedy nanejvýš vhodné zaokrouhlit výsledek s ohledem na přesnost zadaných (či zvolených) veličin.

Na úplný závěr se můžeme zamyslet nad (ne)realností příkladu.

- a) Na automobil jezdící rychlostí  $0,22c$  si asi ještě pár let počkáme. Jízda v něm bude ale velmi nepohodlná. Zkuste si spočítat odstředivou sílu působící na pasažéry v tomto autě jedoucím po povrchu zemském. Prostředky, kterými by policista v historicky krátké době takto rozjeté auto zastavil a pan Doppler by přitom neutrpěl újmu na zdraví, zatím neznáme.
- b) Pan Doppler si mohl všimnout, že zelená se nachází na semaforu na místě červené.
- c) Ať už pan Doppler zelenou viděl nebo ne, bylo by pro něj určitě výhodnější zaplatit pokutu za jízdu na červenou, než riskovat částku o několik řádů vyšší.

*Jirka Franta*