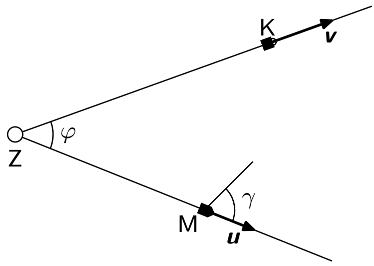
10. ročník, úloha II . P ... dvojčata ve vesmíru *(5 bodů; průměr ?; řešilo 82 studentů)*

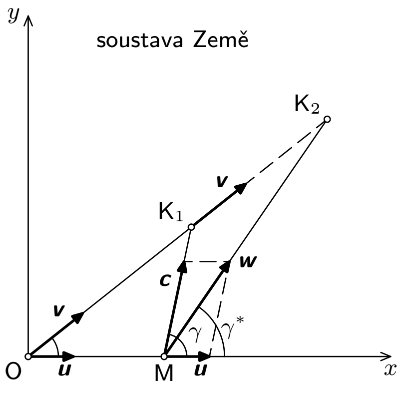
Michal a Karel jsou dvojčata. V zájmu vyššího vědeckého poznání je posadíme každého do jiné kosmické lodi v týž čas $t = 0$ a vystřelíme ze Země Z rychlostmi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ vstříc hvězdným dálavám. Abychom jim život co nejvíce znepříjemnili, jejich rychlosti svírají úhel φ, jak je to vidět na obr. 1. Po čas hvězdného putování se jejich rychlosti nemění. V čase t_0 se Michal, který se zrovna nachází v bodě M, rozhodne vyslat zprávu – rádiový signál svému sourozenci. Pod jakým úhlem γ vůči svému směru pohybu musí zaměřit signál, aby Karel zprávu obdržel?



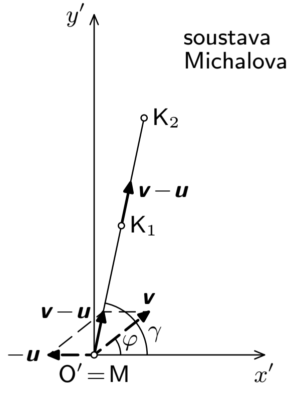
Obr. 1

Vliv ostatních těles na dráhu lodí a paprsku zanedbejte. Diskutujte též případ, kdy vesmírné lodě nejsou vypuštěny ve stejný čas, ale Michal se vydá do vesmíru o dobu T dříve. Jak se změní výpočet, budou-li velikosti rychlostí $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ blízké rychlosti světla c?

Předně si uvědomme, že když se budeme na celou situaci dívat ze soustavy spojené se Zemí, nebude platit, že úhel, pod kterým signál poletí, je shodný s úhlem, pod kterým signál Michal vyslal (viz obr. 2). Označme si $\boldsymbol{w}$ rychlost signálu v soustavě spojené se Zemí. Pohybuje-li se Michal rychlostí $\boldsymbol{u}$ a vyšle-li signál rychlostí $\boldsymbol{c}$ pod úhlem γ, rychlost letu signálu bude $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}$ (na úlohu se díváme nerelativisticky). Rychlosti se *vektorově sčítají* a s výjimkou případu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ zřejmě platí $\gamma \neq \gamma^*$, kde γ^* je úhel letu signálu v soustavě spojené se Zemí. Proto musíme úlohu řešit v Michalově soustavě.



Obr. 2



Obr. 3

Tato soustava se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$. Pro rychlost Karla v Michalově soustavě pak platí[1]

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\,,$$

což rozepsáno ve složkách

$$v'_x = v_x - u\,, \qquad v'_y = v_y\,.$$

[1] Tyto vztahy se nazývají adiční teorém skládání rychlostí, který plyne z Galileovy transformace souřadnic. Ve speciální teorii relativity musíme použít jiné vztahy vycházející z Lorentzovy transformace souřadnic.

Ve speciálním případě, kdy $T = 0$, se Karel vzhledem k Michalovi pohybuje po přímce, která prochází počátkem Michalovy soustavy, tj. polohou Michala (viz obr. 3). Michal musí vyslat signál tímto směrem. Z obrázku pak snadno nahlédneme, že platí

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - u} = \frac{v\sin\varphi}{v\cos\varphi - u}. \tag{1}$$

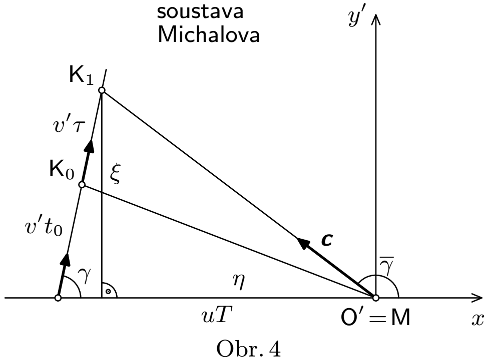
Pokud vystartuje Michal o čas T dříve, bude úhel γ závislý na čase, označme jej $\overline{\gamma}$. Na obr. 4 je nastíněna tato situace v soustavě spojené s Michalem. V čase $t = -T$ vystartuje ze Země Michal, v $t = 0$ se vydává na svou pouť i Karel, aby po uplynutí doby t_0 mohl Michal vyslat signál (bod K_0), který Karel obdrží v čase $t = t_0 + \tau$ (bod K_1). Dráha Karla v Michalově soustavě je přímka se směrnicí $\operatorname{tg}\gamma$ vypočtené podle vzorce (1). Podle obr. 4 pak snadno odvodíme

$$\operatorname{tg}\overline{\gamma} = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\sin\gamma(t_0+\tau)v'}{\cos\gamma(t_0+\tau)v' - uT}\,,$$

kde τ je doba letu signálu. Uvědomme si však, že v nerelativistickém případě je doba letu signálu τ vůči času t_0 zanedbatelná, neboť dráha, kterou za nějakou dobu urazí Karel je mnohem menší než dráha, kterou za stejnou dobu urazí světlo. Na obrázku to znamená, že splynou úsečky MK_0 a MK_1. Dobu τ je samozřejmě možno spočítat z kosinové věty $\triangle\mathsf{K}_1\mathsf{MK}_0$, což vede na řešení poměrně složité kvadratické rovnice. Výsledek vychází úměrný členům v/c a u/c, to znamená, že nemá smysl počítat s časem τ v nerelativistickém případě. Proto

$$\operatorname{tg}\overline{\gamma} \approx \frac{v' t_0 \sin\gamma}{v' t_0\cos\gamma - uT}\,. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) rovnou vidíme, že pro čas $t_0 \gg T$ se $\overline{\gamma}$ blíží γ. To je samozřejmé, neboť za této podmínky je v Michalově soustavě rozdíl mezi směrnicí Karlovy dráhy a drahou signálu minimální.



Obr. 4

V případě, že jsou rychlosti blízké rychlosti světla, musíme nahradit Galileovu transformaci transformací Lorentzovou. Pohybuje-li se soustava $\widehat{S}$ rychlostí u vůči soustavě S ve směru osy x, Lorentzova transformace potom zní (stříškované veličiny jsou vztaženy k pohybující se soustavě $\widehat{S}$.)

$$\widehat{x} = (x - ut)\zeta\,, \qquad \widehat{y} = y\,, \qquad \widehat{t} = \left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\zeta\,, \tag{3}$$

kde ζ je Lorentzův faktor,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,.$$

Uvažujeme-li však relativistické efekty, musíme také použít relativistické vzorce pro skládání rychlostí

$$\widehat{v}_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}\,, \qquad \widehat{v}_y = \frac{v_y}{\zeta\left(1 - \dfrac{uv_x}{c^2}\right)}\,.$$

Na rozdíl od klasického případu se nám v relativitě transformují i složky rychlosti kolmé na směr pohybu soustavy $\widehat{S}$. Je to dáno prostě tím, že při Lorentzově transformaci nezůstává čas stejný pro různé inerciální systémy a transformuje se stejně jako souřadnice; mluvíme pak o časoprostoru. Označme hledaný úhel v relativistickém případě $\widehat{\gamma}$. Potom za předpokladu $T = 0$ platí

$$\operatorname{tg}\widehat{\gamma} = \frac{\widehat{v}_y}{\widehat{v}_x} = \frac{v\sin\varphi}{v\cos\varphi - u}\frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg}\gamma\frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg}\gamma\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{4}$$

To znamená, že při započtení relativistických efektů se nám $\operatorname{tg}\widehat{\gamma}$ změní právě o Lorentzův faktor ζ. To plyne z toho, že v jakékoliv fyzikální souřadné soustavě zůstává rychlost světla stále stejná.

Poznámka. Pro zajímavost uvedeme i odvození vztahů pro relativistické skládání rychlostí. Stačí nám k tomu pouze Lorentzova transformace (3) a znalost obecně platných vztahů $v_x = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ a $v_y = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t$. Aplikujme tyto vztahy v soustavě $\widehat{S}$ za použití (3)

$$\widehat{v}_x = \frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \frac{\zeta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u\right)}{\zeta\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}},$$

$$\widehat{v}_y = \frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}\widehat{t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\widehat{t}}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_y}{\zeta\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{v_y}{\zeta\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}.$$

Martin Krsek

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.