10. ročník, úloha I . E ... *výše mého domova hvězd se bude dotýkat* *(7 bodů; průměr ?; řešilo 106 studentů)*

První experimentální úloha letošního ročníku je svým zadáním poměrně jednoduchá, poskytuje však velký prostor pro vaši nápaditost a vynalézavost. Změřte výšku vašeho bydliště co nejvíce způsoby a výsledky porovnejte. Nebojte se odvážných nápadů. Spočítejte nebo alespoň odhadněte chyby měření nezapomínajíce na to, že ve fyzice platí – jedno pozorování = žádné pozorování!

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot a výpočet odchylky měření (viz Chyby měření). Stejně nezbytný je závěr a diskuse získaných výsledků, kde diskutujete, proč vám co jak vyšlo, srovnáváte metody apod. To vše se bohužel do našeho řešení z prostorových důvodů nevešlo. Proto jsou podrobně vypracovány především první dvě metody, které mají všechny základní náležitosti.

Měření přímé

Pomůcky

Pro naše měření je vhodné stavební pásmo, které mívá délku několika desítek metrů a bývá dělené po 1 mm. Při měření délky 1 metru pásmem se dopouštíme chyby asi 1 mm. Dále jsou užiteční olovnice a kamarád.

Popis měření

Vylezeme na střechu a pásmo spustíme k patě domu asistentovi, který jeho konec přiloží k zemi tak, aby pásmo bylo napnuté a svislé. Svislost lze kontrolovat vedle spuštěnou olovnicí. Alternativně lze použít dlouhý žebřík a odměřit výšku metrem (pásmem) po částech postupným přikládáním. My jsme měřili pomocí pásma a pomocníka.

Naměřené hodnoty

Měření	h/m	$\Delta h_i/\mathrm{m}$	$(\Delta h_i)^2/\mathrm{m}^2$
1	5,99	+0,00	0,0000
2	6,00	−0,01	0,0001
3	6,00	−0,01	0,0001
4	5,98	+0,01	0,0001
5	5,99	+0,00	0,0000
6	6,00	−0,01	0,0001
7	5,98	+0,01	0,0001
8	6,00	−0,01	0,0001
9	5,98	+0,01	0,0001
10	5,99	+0,00	0,0000

Aritmetický průměr je $\overline{h} = 5{,}99\,\mathrm{m}$.

Výpočet odchylky

Standardní odchylka $s(h) = 0{,}009\,\mathrm{m}$. K hrubé chybě podle 3–$s$ kritéria nedošlo.
Směrodatná odchylka $s(\overline{h}) = 0{,}003\,\mathrm{m}$. Systematická chyba je asi $s_{\mathrm{sys}} = 0{,}01\,\mathrm{m}$.
Celková chyba $s_{\mathrm{tot}} = 0{,}013\,\mathrm{m} \approx 0{,}01\,\mathrm{m}$.
Skutečná výška domu $h = (5{,}99 \pm 0{,}01)\,\mathrm{m}$.

Diskuse

Měření dává poměrně příznivou celkovou chybu. Systematická chyba je dána tím, že se nepovede držet pásmo přesně svisle a také tím, že i když se pásmo prodlužuje jen minimálně, může se trochu prohýbat, pokud jej málo napínáme.

Obměny přímého měření

a) Měření „per partes“ neboli „po částech“. Změříme výšku jednoho bytu (patra) v domě, kde se opakuje více pater stejné výšky, a násobíme počtem pater. Přičteme výšky neperiodických partií, které odměříme zvlášť. Možné je též u paneláku změřit výšku panelu zvenku. Chyba měření roste s rostoucím počtem dílů, na které si dům rozdělíme, protože se zvýší počet měření.
b) Jsou-li v domě schody (stejné), změříme výšku jednoho schodu a násobíme počtem schodů. Zvlášť změříme výšku nezaschoděných partií domu. Chyba je opět větší než u prostého přímého měření. Navíc tu používáme předpokladu, že všechny schody mají stejnou výšku, což nám nikdo nezaručí.

Měření pomocí provázku

Postup

Ze střechy, resp. jiného nejvyššího bodu, jehož výšku nad patou domu chceme měřit, spustíme na provázku závaží. Závaží se dole musí dotýkat země a zároveň provázek musí zůstat napnutý. Nahoře v úrovni bodu, jehož výšku měříme, učiníme na provázku značku (uzlík, fix, kolíček na prádlo). Potom provázek rozložíme někde na podlaze a přikládáním měřidla délky zjistíme délku provázku včetně závaží až ke značce.

Pomůcky

provázek, závaží, délkové měřidlo (metr, pásmo).

Naměřené hodnoty

Měření	h/m	Δh_i/m	$(\Delta h_i)^2$/m^2
1	5,95	+0,03	0,0009
2	5,96	+0,02	0,0004
3	5,98	+0,00	0,0000
4	6,00	−0,02	0,0004
5	5,99	−0,01	0,0001
6	5,97	+0,01	0,0001
7	5,94	+0,04	0,0016
8	5,99	−0,01	0,0001
9	6,02	−0,04	0,0016
10	5,97	+0,01	0,0001

Aritmetický průměr je $\overline{h} = 5{,}98\,\mathrm{m}$.

Výpočet odchylky

Standardní odchylka $s(h) = 0{,}02\,\mathrm{m}$. K hrubé chybě podle 3–$s$ kritéria nedošlo.

Směrodatná odchylka $s(\overline{h}) = 0{,}008\,\mathrm{m}$. Systematická chyba je asi $s_{\mathrm{sys}} = 0{,}03\,\mathrm{m}$.

Celková chyba $s_{\mathrm{tot}} = 0{,}04\,\mathrm{m}$.

Skutečná výška domu $h = (5{,}98 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m}$.

Diskuse

Při měření dochází k napínání a prodlužování provázku, při srovnání provázku s měřidlem pak provázek je napnutý podstatně méně. Zejména proto nám vyšla průměrná hodnota menší než při přímém měření. Systematická chyba – pro daný provázek jsme odhadli, že 1 m se tahem prodlouží asi o 2 mm, dále jsme připočetli asi 2 cm na různé chyby při tvoření značky a porovnávání provázku s metrem.

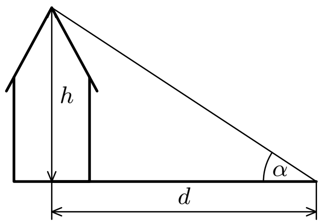
Toto byla dvě měření vzorová skoro se vším všudy (to jest s trochou teorie, popisem měření a potřebných pomůcek, naměř. hodnotami v tabulce, výpočtem odchylek, určením skutečné výšky domu a diskusí. Z důvodu úspory místa dále uvedeme jen stručný popis jednotlivých metod.

Trigonometrické metody

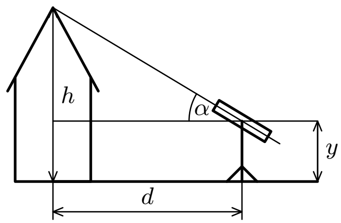
Těchto metod jste uváděli snad nejvíce. Mají většinou tu společnou nevýhodu, že nepočítají s nerovností terénu v určitém okolí domu.

1. Měření úhlů

Nechť okolí domu je vodorovná rovina. Odejděme do vzdálenosti d od průmětu nejvyššího bodu domu do vodorovné roviny. V této vzdálenosti na zemi změřme úhloměrem úhel α, pod kterým vidíme nejvyšší bod domu nad vodorovnou rovinou okolí (obr. 1). Platí $h = d \operatorname{tg} \alpha$. Chyba měření spočívá zejména v praktické nerovnosti terénu (tomu lze odpomoci vhodným užitím vodováhy) a v poměrně nepřesném měření úhlu.



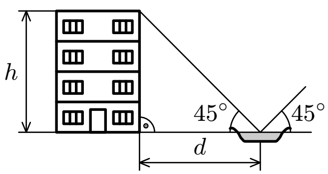
Obr. 1



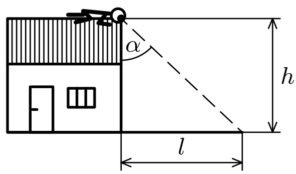
Obr. 2

Obměny

a) Do různých vzdáleností d od průmětu vrcholu domu stavíme astronomický dalekohled a zaměřujeme jej na nejv. bod (obr. 2). Na stupnici azimutální montáže dalekohledu odečteme úhel α. Délkovým měřidlem změříme výšku y průsečíku osy hledáčku a osy stativu nad zemí. Výška domu $h = x \operatorname{tg} \alpha + y$.



Obr. 3



Obr. 4

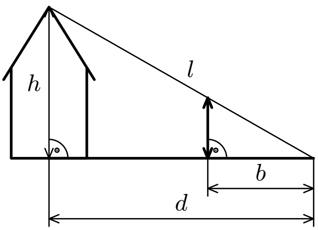
b) Pomocí odrazu v talíři s vodou (obr. 3). Do misky nalijeme vodu. Pak misku poponášíme těsně nad zemí směrem od domu a díváme se do ní pod úhlem 45° vzhledem k rovině hladiny (úhloměr). S miskou jdeme tak daleko, dokud v ní nevidíme odraz špičky domu.

Potom změříme pásmem vzdálenost misky od domu – to je výška domu. Chyby se objeví zejména při měření úhlu. Poznámka: místo vody lze užít rovinné zrcadlo – potom máme ale nový problém zajistit jeho vodorovnost.

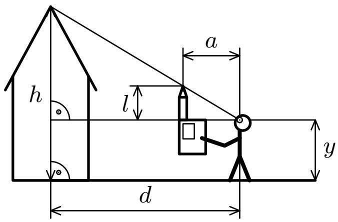
c) Shora zjišťujeme, pod jakým úhlem vůči normále se nám jeví úsečka délky l vyznačená na zemi kolmo ke zdi domu (obr. 4).

2. Zákrytová pozorování

a) Metoda J. Verna z knihy Tajuplný ostrov nebo též v knize Dva divoši od E. T. Setona. Do země před dům zabodneme do země svisle tyčku. Pak si lehneme na zem a posouváme se tak dlouho, dokud nebude naše oko, vrchol tyče a vrchol střechy ležet v jedné přímce (obr. 5). Pak změříme výšku tyče l, vzdálenost b oka od tyče a vzdálenost d oka od domu. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků je výška domu $h = dl/b$. Chyba měření plyne zejména z nerovností terénu, z určování polohy oka a z měření délek d, l.
Poznámka: speciálně, je-li $l = 1\,\mathrm{m}$, pak $h = d/b$.
Obměna: Oko přiložíme k zemi blíž k tyčce než v předchozím. Kamarád potom vyznačí na tyčce bod, který zakrývá vrchol domu. Jako l pak uvažujeme výšku značky nad zemí.



Obr. 5



Obr. 6

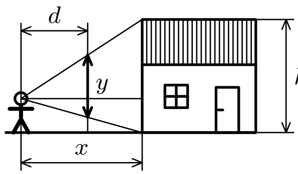
b) Skautský způsob. Stoupneme si dostatečně daleko od domu. Zápisník podržme vodorovně před okem, vysuneme kolmo k němu tužku tak, abychom přes její špičku viděli vrchol domu (obr. 6) – pak opět užijeme podobnost.

c) Další zákryt (viz obr. 7). Z podobnosti trojúhelníků plyne $h = y/dx$.

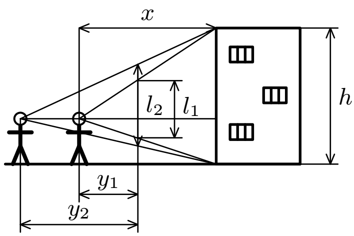
d) Srovnávací zákrytové pozorování (obr. 8). Z podobnosti trojúhelníků odvodíme

$$h = \frac{l_1 l_2 (y_2 - y_1)}{l_1 y_2 - l_2 y_1}\,.$$

Výhoda oproti předchozímu – nemusíme měřit naši vzdálenost x od domu.



Obr. 7



Obr. 8

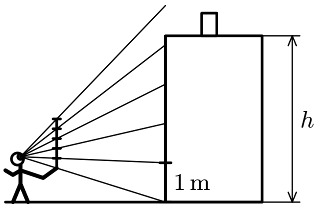
e) Pomocí tužky. Na domě vyznačíme svisle od země úsečku délky 1 m. Stoupneme si do velké (vhodné) vzd. od domu a před oči umístíme svisle tužku tak, aby nám právě zakrývala úsečku vyznač. na domě. Potom zjistíme tužkou, kolikrát se tato úsečka vejde do výšky domu (obr. 9). Jde o nanášení míry v nějakém poměru.

Chyby: z obr. 9 vidíme, že čím stojí člověk dál od domu, tím jsou jednotlivé trojúhelníky vzáj. podobnější, a tedy tužka přesněji kryje 1 m.

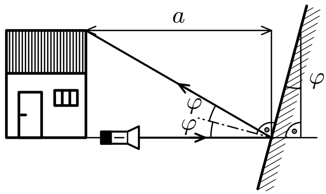
Další chyby: problém dodržet stálou vzdálenost tužky od očí a odhadnout, kde končil předchozí zákryt tužky, když posouváme tužku o jednu její délku výše. Lze použít i fotoaparátu a z fotografie pak odečítat jednotlivé poměry.

3. Zrcátková metoda

Viz obr. 10. Baterku položme na zem, aby svítila vodorovně, kolmo od stěny domu. V ose baterky umístíme zrcadlo (obr. 10) pod takovým úhlem φ vůči normále, aby vrhalo „prasátko“ na nejvyšší bod domu. Změřme úhel φ a vzdálenost a průmětu vrcholu domu od bodu odrazu paprsku na zrcadle. Platí zřejmě $h = a\,\mathrm{tg}\,(2\varphi)$.



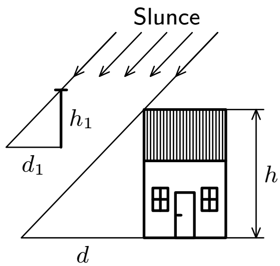
Obr. 9



Obr. 10

4. Srovnávání délek slunečního stínu

Svisle postavíme tyčku, změříme její výšku h_1, délku jejího stínu d_1 a délku stínu domu d. Výška domu je potom $h = h_1 \cdot d/d_1$, jak nahlédneme z obr. 11. Nevýhody: nehodí se pro domy v nerovném terénu, obestavěné, vrhající stín na frekventovanou silnici, nebo např. s mírným sklonem střechy, jejíž vrchol vrhá stín pouze krátce po východu a těsně před západem slunce, a to ještě někam hodně daleko, metoda závisí na přízni počasí. Chyby vznikají nerovnostmi terénu, ale také neostrostí stínu, neboť Slunce má na obloze dost velkou úhlovou velikost.



Obr. 11

Mechanické metody

1. Výtah

Známe-li provozní rychlost výtahu v, změříme stopkami dobu t, za kterou výtah urazí nějakou část výšky domu, když už je rozjetý; tato část má potom výšku $s = vt$. Zbylé partie, kam výtah nejede a kde jede zrychleně, změříme jinak. Toto měření je však silně nepřesné.

2. Valení po nakloněné rovině

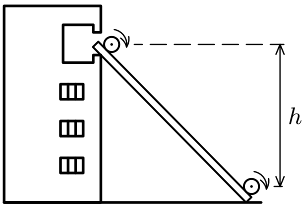
Viz obr. 12. O dům opřeme fošnu, aby její konec sahal až do bodu, jehož výšku chceme měřit. Po fošně necháme valit kouli/válec. Změříme stopkami dobu valivého pohybu po fošně, změříme hmotnost tělesa a změříme délku fošny. Poznámka: použitelné pro menší domy. Nevýhody: přímému měření se nevyhneme a ještě způsobíme velkou chybu při měření času a zanedbáním odporu vzduchu a tření.

3. Matematické kyvadlo

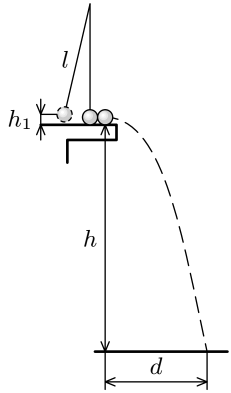
Tenký provázek zatížený na konci malým těžkým závažím spustíme podél měřené stěny. Nahoře provázek upevníme a takto vzniklé kyvadlo rozhoupeme s malou výchylkou. Důležité je, aby těžiště závaží bylo v rovnovážné poloze těsně nad zemí (ještě lepší je vyhrabat tam důlek). Stopkami změříme dobu kyvu (nejlépe tak, že změříme dobu více kyvů a dělíme ji jejich počtem). Jako model můžeme použít s malou chybou kyvadlo matematické, pro které

$$h = l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\,,$$

kde T je perioda, l délka závěsu, h výška domu. Chyby závisí na konkrétních parametrech kyvadla – odpor vzduchu, kyvadlo je fysikální, chyba při měření času (malá).



Obr. 12



Obr. 13

4. Pružné kuličky

Vytvořme matematické kyvadlo o délce závěsu l tak, aby kulička v rovnovážné poloze byla v nejvyšším bodě domu (viz obr. 13). Do tohoto bodu položíme druhou, identickou kuličku. První kuličku z nějaké výchylky pustíme, ta pružně narazí do druhé a udělí jí počáteční rychlost ve vodorovném směru. Druhá kulička tedy koná vodorovný vrh. Změřme h_1, d. Potom za předpokladu ideální pružnosti kuliček a užitím zákona zach. energie dostaneme

$$h = \frac{1}{4}\frac{d^2}{h_1}\,.$$

Chyba závisí na dvou podstatných věcech – jak dalece je ráz kuliček pružný ve skutečnosti a jak velký je odpor vzduchu při pohybu kuliček.

Pády – speciální mechanické metody

1. Volný pád malého předmětu se zanedbáním odporu prostředí

Dobu pádu měříme stopkami. Výška domu je v tomto modelu úměrná druhé mocnině času, proto chyba roste lineárně s dobou pádu. Jisté výpovědní hodnoty výsledku dosáhneme při větších výškách domu pro aerodynamické tvary padajícího předmětu.

2. Volný pád s odporem vzduchu

Zde necháme padat předmět s malou hmotností, velkým součinitelem odporu a většími rozměry. Pustíme např. kulový míček (balónek) z nejvyš. bodu domu. Rychlost míčku se velmi rychle ustálí na určité hodnotě, pohyb balónku můžeme s malou chybou považovat za rovnoměrný. Síly tíhová $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$, vztlaková $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}} = -V\varrho\boldsymbol{g}$ a odporová, působící proti směru pohybu a mající velikost

$$F_{\mathrm{odp}} = -\frac{1}{2}C\varrho S v^2\,,$$

jsou během rovnoměrného přímočarého pohybu v rovnováze, na těleso působí nulová celková síla (m je hmotnost míčku, g velikost tíhového zrychlení, V objem míčku, ϱ hustota vzduchu a C je součinitel odporu tělesa – pro kouli $C \approx 0{,}48$). Odtud snadno

$$h = t\sqrt{\frac{2(mg - \frac{4}{3}\pi R^3\varrho g)}{C\pi R^2\varrho}}\,,$$

kde R je poloměr míčku (balónku), t doba pohybu.

Vylepšení: míček vyhodíme svisle vzhůru nad nejvyšší bod domu, aby měl při pádu v jeho úrovni téměř stálou rychlost.

Chyby: měříme čas (asi 0,2 s), poloměr balónku (nevelká chyba, je-li dost kulový), hmotnost balónku se vzduchem.

Hydromechanika

1. Objem okapu

Okap nebo svisle podél domu nataženou hadici naplníme po úroveň bodu, jehož výšku měříme, vodou. Buď už při nalévání anebo při vylití do nějaké nádoby zjistíme objem V okapu/hadice. Poloměr R okapu změříme šuplerou. Výška pak zřejmě

$$h = \frac{V}{\pi R^2}\,.$$

Chyby nastanou při měření objemu, při prohnutí nebo prodloužení hadice. Problém – pro vysoké domy sehnat vhodnou hadici, dost vody a zařízení, které by tu hadici udrželo . . .

2. Hydrostatika

Hadici (okap) naplníme vodou jako v předchozím, ale dolů umístíme manometr, kterým změříme hydrostatický tlak, který nezávisí na průřezu hadice apod., ale jen a pouze na výšce hladiny nad manometrem. Výška hladiny je

$$h = \frac{p}{\varrho g}\,.$$

Chyby vzniknou zejména při měření menších tlaků.

3. Hydrodynamika

Zacpeme zdola okap a naplníme jej vodou jako v předchozím. Po uvolnění dolního konce měříme rychlost vytékající vody (např. tak, že změříme, za jak dlouho se naplní malá nádoba přistavená pod okap). Původní výšku hladiny pak vypočteme z Bernoulliho rovnice.

Elektromagnetické metody – např. odporem drátu

Svisle podél stěny domu natáhneme tam a zpět drát konst. průřezu. Změříme jeho el. odpor R. Potom změříme odpor R_0 kusu téhož drátu délky l_0. Platí

$$R_0 = \varrho \frac{l_0}{S}\,, \quad R = \varrho \frac{l}{S} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2} = \frac{Rl_0}{2R_0}\,,$$

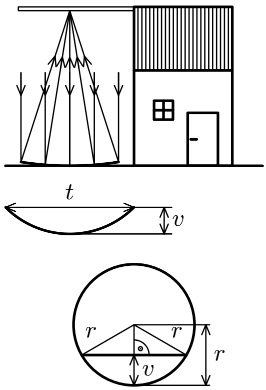
kde ϱ je rezistivita materiálu, z něhož je drát vyroben. Chyba metody závisí na tom, jak šikovně ji provedeme. Jestliže je totiž odpor kusu drátu délky l_0 malý (třeba $10^{-3}\,\Omega$), tak výsledek měření takového odporu přímo ohmmetrem je katastrofálně nepřesný (chyby třeba 500 % – výborný generátor náhodných čísel). Buď tedy musíme použít drát s mnohem větší rezistivitou, anebo odpor krátké části drátu měřit šikovněji – najděte si někde, co je to tzv. Ohmova metoda (drátem se pouští velký proud a měří se napětí přímo mezi dvěma body drátu, jejichž vzdálenost je l_0). Když toto vyřešíme, můžeme provést celkem přesné měření.

Metoda korýtkového zrcadla

Dle obr. 14 umisťme na štít domu vodorovnou desku. Kus pozinkovaného plechu tvaru obdélníku ohneme na zemi pod deskou v část pláště válce tak, aby paprsky vrhané sluncem soustředěny byly tímto „korýtkovým zrcátkem“ do jedné co nejostřejší přímky na desku. Změřme pak parametry zrcadla (tětivu t, výšku v) a spočtěme poloměr R kružnice, jejíž část je řezem korýtka

$$R = \frac{t^2}{8v} + \frac{v}{2}\,.$$

Chyby mohou být značné vzhledem k tomu, že ohnout plech do daného tvaru je nesnadné, nicméně tato metoda byla skutečně realizována.



Obr. 14

Některé neprovedené, ale proveditelné metody

Doba, za kterou urazí vzdálenost zvuková vlna (ozvěna, mikrofon); určení frekvence tónu vydávaného po úderu do trubky stejné délky, jako je výška domu; různá využití čoček a zrcadel; na zemi měříme v noci intenzitu světla ze zdroje na střeše expozimetrem atd. atd.

Metody krajně nerealistické

Jakákoli použití obecné teorie relativity; měření frekvence fotonu puštěného z vrcholu domu nahoře a dole; práce námi vykonaná při vynesení 1 kg od přízemí na střechu; různý bod varu vody a rozdíl tlaku v týž okamžik v různých výškách je pro objekty typu dům příliš malý, lze je použít pouze pro měření výšky nadmořské; odchylka volně padajícího tělesa vlivem působení Coriolisovy síly; rozdíl grav. zrychlení v různých výškách; měření času, za který uletí danou vzdálenost světlo, při použití běžně dostupných pomůcek . . .

Závěr

Jak vidíte, metod je skutečně přehršel. Avšak ne všechny dávají uspokojivé výsledky. Přesnost většiny metod ovšem záleží na jejich konkrétní realizaci, takže by nemělo smysl zde např. obecně „seřadit“ uvedené metody podle přesnosti. Osobně jsme obdrželi dobré výsledky u přímého měření, jen o trochu méně přesné při měření provázkem; metody používající měření úhlu jsou méně přesné (tam jsme dostali až 10 % chybu).

Matouš Jirák & Andrea Budovičová