

Zadání VI. série



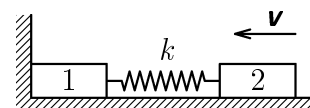
Termín odeslání: 2. června 1997

Úloha VI.1 ... *kapalina mezi rovnoběžnými deskami*

Odvoďte vztah pro výšku h hladiny kapaliny mezi dvěma svislými nekonečně dlouhými rovinami, vzdálenými od sebe d , které jsou ponořeny do kapaliny. Povrchové napětí kapaliny je σ a hustota je ρ .

Úloha VI.2 ... *pružina, kvádr a tření*

Na obr. 1 máme dva stejné kvádry o hmotnosti m spojené pružinou o tuhosti k . Koeficient tření (statického i dynamického) je f . Jakou minimální rychlostí v musíme poslat kvádr č. 2 směrem ke stěně, aby se v průběhu nastalého děje pohnul i kvádr č. 1?



Obr. 1

Úloha VI.3 ... *kulečník*

Máme N identických kulečnickových koulí, které leží na nekonečně velkém, ideálně rovném a vodorovném kulečnickovém stole. Jednu kouli uvedeme do pohybu. Po jistém počtu nárazů se koule vrátí zpět a zůstane stát. Jaký je minimální počet koulí, aby to bylo možné. Všechny rázy jsou dokonale elastické.

Úloha VI.4 ... *lanovka*

Na Šumavě se v současnosti buduje zajímavé zařízení na přepravu dřeva. Protože se do močálu normální traktor nedostane, pokoušejí se lesníci použít pro přepravu dřeva vzducholodě. Vzducholodě bude mít nosnost 5000 kg a bude upevněna ke dvěma stanovištím vzdálených od sebe 3 km. Vzducholodě nemá žádný pohon a je tahána mezi kotvícími stanovišti. Jednu cestu absolvuje naložená dřeva a druhou jede prázdná, občas nesa vaky s vodou.

Jakou maximální silou bude vzducholodě působit na upevňovací lana, bude-li prázdná a nesmí-li její výška nad terénem přesáhnout 300 m (aby nenarušila vzdušný prostor) na celé tříkilometrové trase?

Úloha VI.5 ... *vodovod*

Ke koncům vodorovné trubice délky l , hmotnosti M a konstantního průřezu S jsou připevněna kolena, která přivádí vodu seshora a odvádí ji směrem dolů (voda běží svisle, zatočí doleva a běží vodorovně a pak zahne vpravo a běží zase svisle dolů). Druhé koleno je upevněno na otočném kloubu. Jaký průtok musí být v trubici, aby se netočila?

Úloha VI.6 ... *jak tlustý je papír?*

Pokuste se změřit, jak tlustý je list papíru. Aby byly vaše výsledky srovnatelné, měřte papír pocházející ze školního sešitu nelinkovaného.

Drazí řešitelé!

Právě držíte v rukou poslední zadání letošního ročníku našeho semináře. Není to však poslední dopis, který od nás před prázdninami dostáváte. Ještě byste od nás měli před prázdninami obdržet řešení páté a šesté série.

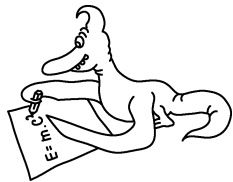
Začátkem ročníku jsme slibovali odměny pro nejlepší řešitele. Jednou z těchto odměn je týdenní soustředění v Ouči, které právě v těchto dnech probíhá. Toto soustředění však

není vyvrcholením letošního ročníku. Tím bude až podzimní soustředění, protože zatím nevíme, kdo vlastně letošní ročník vyhrál. Právě na podzimním soustředění obdrží vítězové jednotlivých kategorií hodnotné ceny.

Poslední akcí, kterou jsme slibovali těm opravdu nejlepším, byl zahraniční zájezd. Ale organizátoři míni, Ministerstvo financí mění, a tak se nám nepodařilo do letošního rozpočtu prosadit nezanedbatelnou částku, která by byla nutná na realizaci této akce. Pro vaši informaci, Univerzita Karlova v letošním roce skončila na posledním místě ze všech vysokých škol co se týče nárůstu finančních prostředků. Na fyzice peníze na provoz dokonce každý rok klesají (kdyby nebyly granty, můžeme fakultu zavřít), takže požadovat finanční prostředky od fakulty na tuto „exkluzivní“ akci je téměř nemožné. Tímto se omlouváme letošním vítězům, vezte však, že příští rok zájezd bude, i kdyby jej měl Halef platit ze svého.

Nevíme, jestli vás stihne poslední dopis ještě před prázdninami, a proto pro jistotu již teď vám přejeme hodně úspěchů v závěru školního roku a čtvrtákům samozřejmě šťastnou maturitu.

Vaši organizátoři



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... sever (8 bodů, řešilo 80 studentů)

Cílem úlohy bylo, abychom si vyjasnili, jak funguje známá to poučka ze školy o určení severu pomocí ručičkových hodinek:

Jsmeli na severní polokouli a namíříme-li malou ručičku na Slunce, pak osa úhlu β , určeného malou ručičkou, středem ciferníku (vrchol úhlu) a dvanáctkou, určuje severojižní směr a jih je před námi. Po otočení se o 180° se bude náš pohled upírat na sever.

Toť tedy poučka.

Zbývá říci, proč platí a hlavně, jak přesně. Následující řešení čerpá z myšlenek Tomáše Braunera (T.B.), přičemž jedno z jeho tvrzení (zmíním se o něm později) je sice pro mou představivost těžce představitelné, ale je v pořádku, jak mi potvrdil můj vlastní přímočarý (ale delší) výpočet. Takže k věci.

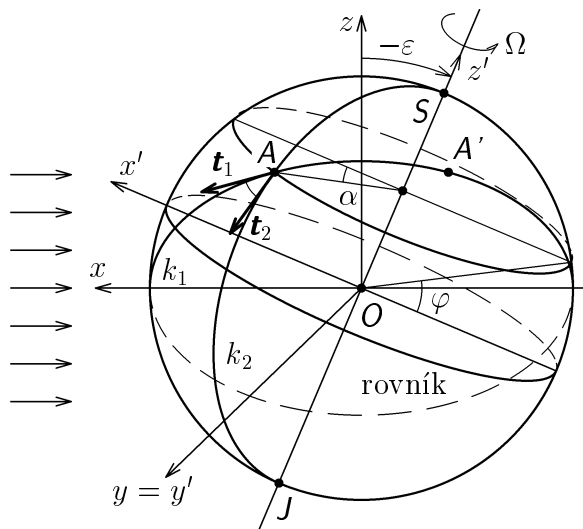
Výše zmíněné pravidlo připouští dvě interpretace: a) hodinová ručička míří ke Slunci, b) hodinová ručička míří k průmětu Slunce do tečné roviny k Zemi v místě pozorovatele, ciferník hodinek také leží v tečné rovině. Jinak řečeno, rovina určená Sluncem a hodinovou ručičkou je vertikální, tj. kolmá na horizont.

První z variant je nejednoznačná, protože umožňuje rotaci kolem osy určené ručičkou. (Nicméně tuto nejednoznačnost je možno rychle odbourat.) Protože jste se však většinou věnovali interpretaci b), určíme přesnost u ní.

Měříme-li čas od poledne (tj. od doby, kdy Slunce vrcholí), pak za dobu t se Země otočí o úhel $\alpha = \Omega t$, kde Ω je úhlová rychlost rotace Země. Hodinky mají ciferník, na kterém 12 hodinám odpovídá otočení ručiček o 360° . Země se za tuto dobu otočí ale jen o 180° , tj. hodinová ručička rotuje dvakrát rychleji nežli Země kolem své osy.

Představme si nyní, že jsme se podívali na hodinky, zjistili úhel β a z něj úhel $\alpha = \beta/2$, o který se pootočila Země (viz obr. 2). Určeme, o jaký skutečný úhel γ bychom se měli otočit od Slunce, abychom došli na jih (naši metodou nejdříve určíme jih), používajíc přitom hodinky podle interpretace b).

Protože osa rotace Země je skloněna k rovině ekliptiky o $23,5^\circ$, budeme popisovat naši polohu pomocí tří úhlů – α , φ a ε , jejichž význam je patrný z obr. 2. Poznamenejme jen, že úhel ε nabývá hodnot z intervalu $\langle -23,5^\circ, +23,5^\circ \rangle$, podle polohy Země na ekliptice. Dále budeme předpokládat, že se Země pohybuje po kružnici.



Obr. 2

Sluneční paprsek jdoucí rovnoběžně s osou x a procházející bodem $A[x, y, z]$ na Zemi, bude povrch Země protínat ještě v bodě $A'[-x, y, z]$. Body A , A' určují na povrchu Země hlavní kružnici (což je kružnice se středem ve středu koule, ležící na zadané sféře) k_1 . Touto kružnicí je zadaná rovina, v níž leží průmět slunečního paprsku do tečné roviny (to je ono, pro mě ne zcela evidentní, tvrzení T.B.). Směr k jihu určuje poledník v daném místě, který je částí jiné hlavní kružnice k_2 . Úhel γ je pak roven úhlu, který spolu svírají tečné vektory \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 obou kružnic v bodě A .

Bod A má v čárkované souřadné soustavě (jejíž osa je totožná osou rotace Země) souřadnice

$$A[\cos \varphi \cos \alpha, \cos \varphi \sin \alpha, \sin \alpha]. \quad (1)$$

Protože řešení úlohy nezávisí na zvoleném měřítku, zvolili jsme za poloměr Země jedničku.

Jestliže chceme vyjádřit souřadnice bodu A v nečárkované souřadné soustavě, musíme čárkovanou souřadnou soustavu otočit o úhel ε kolem osy $y = y'$:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varepsilon + z' \sin \varepsilon = \cos \varphi \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \varphi \sin \varepsilon, \\ y &= y' = \cos \varphi \cos \alpha, \\ z &= -x' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon = -\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon + \sin \varphi \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Normálový vektor k rovině, v níž leží kružnice k_1 je

$$\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA'} = (0, -z, y) = (0, \cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \cos \varepsilon, \cos \varphi \sin \alpha). \quad (3)$$

Normálový vektor \mathbf{n}_2 k rovině, v níž leží kružnice k_2 je rovnoběžný s rovinou $x'y'$ a můžeme jej zvolit jako: $\mathbf{n}_2(x', y', z') = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$.

Po aplikaci rotace o úhel ε dostáváme

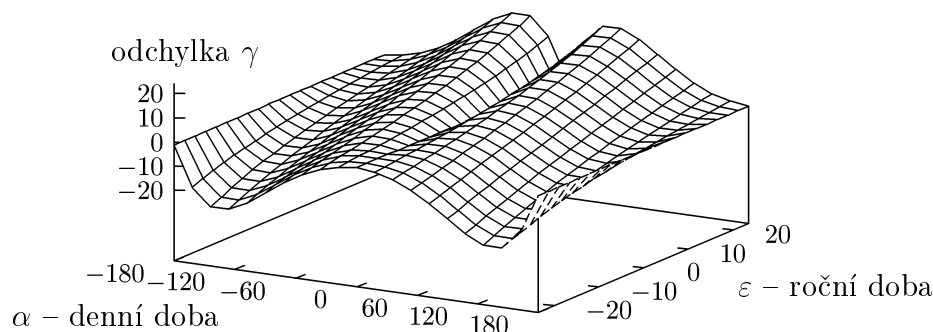
$$\mathbf{n}_2(x, y, z) = (\sin \alpha \cos \varepsilon, -\cos \alpha, -\sin \alpha \sin \varepsilon). \quad (4)$$

Snadno nahlédneme, že úhel který svírají vektory \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 je shodný s úhlem, který svírají vektory \mathbf{n}_1 a \mathbf{n}_2 . Proto

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}. \quad (5)$$

Další výpočet je ryze technický, a proto jej ponecháváme na vás a uvedeme jen konečný výsledek pro $\cos \gamma$:

$$\cos \gamma = \frac{\sin \varphi \cos \alpha \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon}{\sqrt{(\cos \varphi \sin \alpha)^2 + (\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \cos \varepsilon)^2}}. \quad (6)$$



Obr. 3

Chyba δ , již se dopustíme užitím naší poučky, tedy bude $\delta = \gamma - \alpha$. Speciálně pro zeměpisnou šířku $\varphi = 50^\circ$ (na ní se zhruba nachází náš stát), z obr. 3 zjistíme, že největší chyby se dopustíte v létě přibližně v osm hodin ráno nebo ve čtyři hodiny odpoledne a její velikost bude přibližně $24,6^\circ$.

V zimě to bude ve čtyři ráno a v osm večer, což se ale, protože v daných dobách Slunce pro samou tmou nevidíme, ve skutečnosti nestane. Největší chyby se tak dopustíte při východu a západu Slunce.

S výše uvedenou rovnicí (6) pro úhel γ si můžete ještě vyhrát a najít místa na Zemi a časy, ve kterých je chyba největší.

Ještě je nutno uvážit ostatní relevantní chyby.

Samozřejmě by nám měly jít správně hodinky (± 5 minut). Potom je tu chyba vznikající z faktu, že Země je rozdělena do časových pásem, maximální chyba tak vznikající v určení času je půl hodiny (pokud je čas v pásmu určen poledníkem, půlícím pásmo), čemuž odpovídá na ciferníku 15° , ale chyba bude poloviční, tj. $7,5^\circ$.

Dále se díky eliptické dráze objeví chyba, která má maximální velikost přibližně 15 minut v určení poledne podle Slunce (Slunce totiž nebude ve 12 hodin ležet přesně jižním směrem), tj. $3,75^\circ$ v určení severu. Tato chyba je největší v prosinci.

Je možné (spíše jisté), že jednotlivé chyby jsou na sobě závislé, a proto je není možno jen naivně sečíst. Nicméně z obrázků vidíme, že velikost maximální chyby bude v naší zeměpisné šířce $24,6^\circ + 7,5^\circ \doteq 32^\circ$ právě v létě a speciálně pro Prahu, přes níž prochází patnáctý poledník, kolem $24,6^\circ$, protože se neobjeví „pásmová“ chyba a „eliptická“ chyba je v létě minimální.

Poznámka: Rád bych upozornil na chybu, již se dopustili někteří z řešitelů. Mysleli si že výše uvedená metoda bude pracovat i na jižní polokouli s tím, že bude určovat sever. To však, jak si snadno uvědomíte (já jsem to pochopil asi po hodině usilovného vysvětlování mého bratra), není pravda. Hodinky by vám musely jít pozpátku aneb metodu můžete použít s tím, že zrcadlíte malou ručičku vůči ose 6–12.

Závěrem bych rád poděkoval Honzovi Hradilovi, Sašovi Kupčovi, Filipu Münzovi a samozřejmě také Tomáši Braunerovi za originální myšlenku, již jsem využil při vyhotovení autorského řešení.

Tomáš Sýkora

Úloha IV.2 ... Pepek námořník (3 body, řešilo 86 studentů)

Tato úloha byla velmi jednoduchá a ve velké většině případů jste si s ní hravě poradili. Ukážeme si dvě řešení, která jste uváděli nejčastěji:

1) Výslednou práci spočítáme ze změny potenciální energie plachty v tíhovém poli. Pro účely tohoto výpočtu si plachtu nahradíme hmotným bodem o hmotnosti M (hmotnost plachty) umístěným v těžišti plachty. Že je možné takovouto aproximaci provést, o tom nás nejlépe přesvědčí jedna z definic těžiště: Těžiště je působíště výsledné tíhové síly. Těžiště nesmotané plachty leží ve vzdálenosti $b/2$ od ráhna, těžiště smotané plachty leží přímo na ose ráhna. Smotaná plachta zvětšila svoji potenciální energii o

$$E_p = Mg\frac{b}{2}. \quad (7)$$

Stejnou práci musel vykonat Pepek:

$$W = Mg\frac{b}{2}. \quad (8)$$

2) (pouze pro znalce integrálů) Práci spočítáme podle definice jako dráhový integrál síly.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (9)$$

Síla, kterou musí Pepek působit, je rovna tíhové síle dosud nenamotané části plachty (větší síla by způsobila zrychlený pohyb plachty). Vzdálenost nenamotané části plachty od ráhna označím x (viz obr. 4) a bude se měnit od $-b$ do 0. Snadno odvodíme, že tíhová síla působící na nenamotanou část plachty je

$$\mathbf{F} = M\frac{x}{b}\mathbf{g}. \quad (10)$$

Dosazením do vztahu (9) dostaneme

$$W = -\int_{-b}^0 Mg\frac{x}{b}dx = Mg\frac{b}{2}, \quad (11)$$

což je hledaná práce. Při dosazování do skalárního součinu jsme zohlednili to, že Pepek působí silou opačnou než je síla tíhová (znamenko mínus před integrálem).

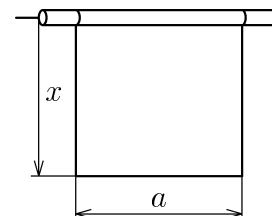
Někteří z vás přidali k tomuto výsledku ještě další práce, které musel Pepek vykonat.

i) Kinetická energie soustavy na konci děje

Pokud bude námořník navíjet konstantní rychlostí až do úplného konce, bude se pak s touto obvodovou rychlostí otáčet ráhno i s plachou. Kinetická energie takovéto otáčející se soustavy je

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} \quad (12)$$

kde J je moment setrvačnosti soustavy ráhno + namotaná plachta, v rychlost vytažení plachty, R poloměr soustavy ráhno + namotaná plachta. Dosazením nějakých rozumných hodnot ($v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $b = 10 \text{ m}$...) zjistíme, že v případě, kdy je hmotnost ráhna s hmotností plachty srovnatelná, je tato kinetická energie minimálně o řád menší než W . V opačném případě bychom tuto energii neměli opomíjet. Je škoda, že nikdo z vás tento odhad neprovedl. Pepek může zabránit konání této nadbytečné práce tím, že přestane těsně před koncem točit a plachta sama „dojede“.



Obr. 4

ii) Ztráty způsobené třením a jinými odporovými silami

Budou pravděpodobně srovnatelné s W a budou záviset na mnoha faktorech (kvalita navíjecího systému, povětrnostní podmínky ...). Práce jim odpovídající se přemění na teplo.

Jedné důležité (snad nejdůležitější) věci si nikdo z vás nevšiml: Snad na žádné lodi se plachty na ráhno nenamotávají, všude se k němu pouze přivazují.

Jirka Franta

Úloha IV.3 ... měření tlaku vzduchu v zimě (5 bodů, řešilo 76 studentů)

Nejprve si ujasněme princip rtuťového barometru. Je to trubice tvaru U, na jednom konci uzavřená. Uvnitř je rtuť, mezi rtutí a uzavřeným koncem U-trubice je vakuum. Z rovnosti sil dostáváme vztah

$$p_a S = h \rho g S, \quad (13)$$

kde ρ je hustota rtuti, S průřez trubice, h rozdíl výšek hladin v obou trubicích. Je vidět, že rozdíl výšek hladin (a tedy i naměřený tlak) závisí pouze na hustotě. Z toho též plyne, že tepelná deformace skleněné trubice nemá na měření vliv. K trubici je připevněno měřítko, na kterém odečítáme jen rozdíl výšek hladin.

Podle definice odpovídá tlak 1 Torr výšce 1 mm rtuťového sloupce v manometru při normálních podmínkách. Zajímá nás h_0 odpovídající teplotě 0°C . Protože měřítko se zimou smrsklo, ukazuje více, než je ve skutečnosti výška hladiny. Tedy

$$h_{\text{skut}} = h(1 + \alpha \Delta T) < h, \quad (14)$$

kde $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ je teplotní délková roztažnost hliníku, $\Delta T = -30 \text{ K}$. Navíc je třeba započítat teplotní změnu hustoty rtuti.

$$\rho_{-30} = \rho_0 / (1 + \beta \Delta T) > \rho_0, \quad (15)$$

kde $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ je teplotní objemová roztažnost rtuti. Pro atmosférický tlak platí vztah $p = h \rho_0 g = h_{\text{skut}} \rho_{-30} g$, z něž chceme dostat h . První vyjádření tlaku je při teplotě 0°C a druhé je při -30°C . Polárníci tedy naměřili

$$h = h_{\text{skut}} \frac{\rho_{-30}}{\rho_0} = h \frac{1 + \alpha \Delta T}{1 + \beta \Delta T}, \quad (16)$$

po dosazení $h \doteq 753,5 \text{ mm}$, čili atmosférický tlak je ve skutečnosti přibližně 754 Torr. Vysokohorská nemoc tedy rozhodně nehrozí, tento tlak se vyskytuje běžně i v normálních podmínkách.

Protože $\alpha \Delta T, \beta \Delta T \ll 1$, můžeme zanedbat jejich vyšší mocniny

$$h \doteq h_{\text{skut}} (1 + \alpha \Delta T) (1 - \beta \Delta T) \doteq h_{\text{skut}} (1 + \alpha \Delta T - \beta \Delta T). \quad (17)$$

Do některého z těchto výsledků jste se měli trefit.

Závěrem bych vytknul řešitelům dvě nejčastější chyby. Je-li zadání v torrech, očekává se v nich i výsledek (stejně tak to platí i o počtu platných číslic veličin). Druhou chybou bylo ignorování hustoty jako klíčové veličiny, na které závisí výška rtuťového sloupce (z čehož také pramenily neobvyklé záměny α a β u rtuti). Je třeba si uvědomit, že výška hladiny se počítá ze vzorce $h = p/\rho g$ a ne přímo z toho, že se nějak zvětší objem rtuti (obecně by totiž nemusela vycházet lineární závislost jako zde).

David Stanovský

Úloha IV.4 ... napjatá situace (4 body, řešilo 71 studentů)

Nejprve připomeňme definiční vztah pro tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{\Delta y} \quad (18)$$

a nyní odvodíme vztahy pro tuhost systému pro paralelní a sériové spojení pružin.

1) Paralelní spojení

Prodloužení obou pružin Δy , bude stejné pro obě pružiny, neboť dle předpokladů úlohy je hrazdička spojující pružiny stále vodorovná, tedy

$$\Delta y = \Delta y_1 = \Delta y_2. \quad (19)$$

Celková síla, kterou působí obě pružiny na hrazdičku, je

$$F = k_1 \Delta y_1 + k_2 \Delta y_2 = (k_1 + k_2) \Delta y \quad (20)$$

a pro „tuhost pružin spojených paralelně“ tak dostaneme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{(k_1 + k_2) \Delta y}{\Delta y} = k_1 + k_2 \quad (21)$$

Připomeňme, že v zadání úlohy nebylo řečeno nic o umístění zátěže na hrazdičce a bez znalosti její polohy na hrazdičce nelze činit žádné úvahy o rozkládání tíhové síly na zátěž působící na jednotlivé pružiny.

2) Sériové spojení

Síla, která způsobuje prodloužení dolní pružiny, se v ideálním případě, přenáší na horní pružinu, proto platí

$$F = F_1 = F_2. \quad (22)$$

Celkové prodloužení soustavy pružin je tedy

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (23)$$

a pro „tuhost pružin spojených sériově“ pak máme

$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{F}{F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (24)$$

Uvažujeme-li, že se obě pružinky budou chovat jako jedna, bez vzniku složených kmitů a podobných nepěkných věcí, stačí použít známý vztah pro dobu periody kmitů oscilátoru tvořeného pružinou tuhosti k , na které je zavěšeno závaží o hmotnosti m :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (25)$$

Tedy poměr period kmitů sériově a paralelně spojených pružin bude

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}} \leq 2. \quad (26)$$

Poslední nerovnost platí díky AG nerovnosti (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem).

Daniel Král'

Úloha IV.5 ... fotbalistický problém (5 bodů, řešilo 67 studentů)

Každý, kdo někdy hrál fotbal, ví, že vykopnutý míč se odchyluje ve směru rotace. Ale jak to zdůvodnit?

Použijme Bernoulliho rovnici

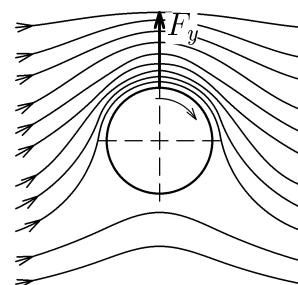
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst.} \quad (27)$$

Jeden ze zdánlivě paradoxních důsledků této rovnice je ten, že v místě, kde kapalina proudí vyšší rychlostí (takové místo poznáme podle vyššího počtu proudnic – podobně jako intenzitu elektrického nebo magnetického pole poznáme podle hustoty siločar), musí být nižší tlak.

Pokud za rychlost v mechanicky dosadíme vzájemnou rychlost povrchu míče a vzduchu, kde se sčítá rychlost pohybu a rotace, dojdeme k závěru, že míč bude zatáčet v opačném smyslu, než je jeho rotace.

Chybnost této úvahy tkví v tom, že jsme předpokládali, že vzduch má na všech protilehlých bodech u povrchu míče stejnou rychlost vůči těžišti míče a opomněli jsme fakt, že míč sám nezanedbatelnou měrou ovlivní proudící vzduch kolem.

Ve viskózní tekutině (souhrnný název pro kapaliny a plyny) strhuje otáčející se koule nejbližší vrstvy tekutiny a rychlost proudící tekutiny je vyšší nahoře (viz obr. 5). Díky odlišným rychlostem proudění na různých stranách koule, musí být na různých stranách koule různý tlak (abychom splnili Bernoulliovu rovnici). Nižší tlak bude na straně s vyšší rychlostí proudění a opačně na protilehlé straně bude tlak nižší. Jestliže pak sečteme jednotlivé tlakové síly, celková výslednice bude směřovat do oblasti vyšších rychlostí.



Obr. 5

Můžeme tedy zopakovat, že koule se bude odklánět od přímého směru ve stejném smyslu jako rotuje.

Tento bezpochyby zajímavý fyzikální efekt nazýváme *Magnusův jev* a byl využit i ke konstrukci novodobých plachetnic – rotorové lodi s Flettnerovým rotorem. Tyto plachetnice mají místo stožáru a plachet vysoké válce, kterými otáčí motor.

Honza (Mocek & Hradil)

Úloha IV.6 ... experimentální (7 bodů, řešilo 47 studentů)**Teorie**

Mnozí z vás nepochopili (někteří aspoň ne ihned) zadání – to se občas stane. Upřesněme tedy, co jsme měli na mysli. Sklenici plnou atmosférického vzduchu obrátíme vzhůru dnem a ponoříme částečně nebo úplně do vody v nějaké větší nádobě. Vlivem hydrostatického tlaku vody dojde ke stlačení vzduchu ve skleničce. Nejjednodušší způsob, jak pomocí takto ponořené sklenice změřit hustotu vody, vychází z měření změny objemu vzduchu ve sklenici při jeho stlačování. Pro toto měření jste měli navrhnout (a pochopitelně i sestavit) co nejpřesnější experimentální uspořádání.

Na obr. 6 vidíte ponořenou skleničku. Sklenku ve vodě upevníme (není to tedy tak, že bychom ji nechali plovat díky vztlakové síle – takovým uspořádáním bychom pokus nejen zbytečně zkomplikovali, ale asi bychom i zvětšili chybu měření).

Před ponořením je ve sklenici vzduch o objemu V_1 , teplotě T_1 a tlaku p_1 , který je roven atmosférickému tlaku p_A . Po ponoření bude mít vzduch ve sklenici objem V_2 , teplotu T_2

a tlak p_2 . Při ponořování skleničky proběhne ve vzduchu nějaký děj, pro který platí stavová rovnice

$$\frac{p_A V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad (28)$$

neboť při této stavové změně se hmotnost vzduchu nemění.

Z rovnice (28) víme, že po ponoření je tlak vzduchu ve sklenici

$$p_2 = \frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2}. \quad (29)$$

Na vodní hladinu ve sklenici působí shora dolů tlaková síla vzduchu $F_p = Sp_2$, kde S je povrch hladiny (vnitřní průřez sklenice ve výšce hladiny uvnitř sklenice). Proti této síle působí směrem vzhůru tlaková síla vody F_t a aerostatická tlaková síla F_{p_A} . Platí $F_t = Sh\rho g$, kde h je rozdíl výšek hladin vně a uvnitř sklenice, ρ je hustota vody a g je velikost tíhového zrychlení. Zřejmě též platí $F_{p_A} = Sp_A$, kde p_A je atmosférický tlak.

Hladinu vody ve skleničce budeme pozorovat, až když se ustálí, tj. v rovnovážném stavu. Tehdy bude platit

$$F_p = F_t + F_{p_A}, \quad (30)$$

jestliže zanedbáme všechny ostatní síly (povrchové jevy apod.). Z této rovnosti sil plyne

$$S \frac{p_A V_1 T_2}{T_1 V_2} = Sh\rho g + Sp_A. \quad (31)$$

Z tohoto vztahu snadno dostaneme hustotu vody

$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} - 1 \right). \quad (32)$$

Pokud bude možno považovat stlačování vzduchu za izotermické, pak se vztah (32) redukuje na

$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right). \quad (33)$$

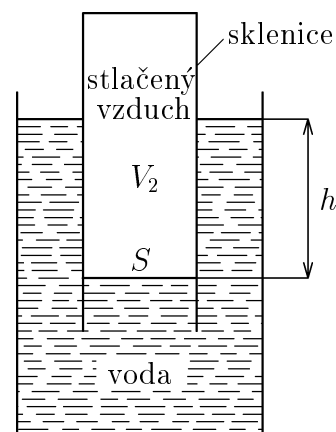
Abychom mohli použít tento redukovaný vztah, bude nutné zajistit, aby rozdíl $|T_1 - T_2|$ byl velice malý. Významem slovíčka „velice“ se budeme podrobněji zabývat v diskusi.

Objem vody ve sklenici po ponoření označme W . Snadno nahlédneme, že $V_2 = V_1 - W$. Dosazením do (33) máme

$$\rho = \frac{p_A}{hg} \left(\frac{V_1}{V_1 - W} - 1 \right) = \frac{p_A}{hg} \frac{W}{V_1 - W}. \quad (34)$$

Měřit budeme hloubku h , objem W a objem celé sklenice V_1 .

Přistupme nyní ke druhé části úlohy, totiž jak uspořádat pokus, aby naše měření hýřilo přesností. Velkou přesnost budeme potřebovat u veličin h_1 , W a $V_1 - W$, neboť relativní odchylky těchto veličin se při výpočtu systematické chyby sčítají (díky tomu že jsou v součinu, resp. v podílu – viz vzorce (33) a (34)). Lze očekávat, že W bude poměrně malé. Naše sklenice by tedy měla mít malý průřez, aby se malý rozdíl objemů projevil velkým rozdílem h hladin, a též kvůli přesnějšímu změření objemu W . Výhodné bude ponořovat sklenici hodně hluboko, protože tím se W zvětší a způsobí menší relativní chybu. Aby bylo přesnější měření $V_1 - W$, bude třeba zvětšit objem celé sklenice.



Obr. 6

Všechny tyto žádoucí vlastnosti se snoubí ve „sklenici“ znázorněné na obr. 7. Tato „sklenice“ vznikne např. z láhve od sirupu, nebo jako v našem experimentu, když k zavařovací lahvi o objemu asi 1 litr připevníme vzduchotěsně pipetu o průměru aspoň 5 mm (abychom mohli zanedbat kapilaritu). Tuto umně zhotovenou „sklenici“ budeme v dalším textu označovat jako „láhev“.

Zavařovací sklenice splňuje požadavek velkého objemu, na stupnici pipety lze zase velmi přesně odečítat změnu objemu W a hloubku h . Hloubka, ve které budeme láhev topit, závisí na hloubce naší domácí vany nebo jiné vhodné nádoby.

Řešitelé, kteří se s problémem přesnosti poprali takto nebo ještě mnohem lépe, byli po zásluze odměněni bonusem. Pravděpodobně nebylo experimentátora, který by zaznamenal úspěch s obyčejnou sklenicí z kuchyňské výbavy (např. od hruškového kompotu).

Pomůcky

Výše popsaná láhev, velká nádoba (vana nebo např. větší odměrný válec), skládací metr nebo pravítko, rukavice, noviny s aktuálním údajem o atmosférickém tlaku.

Výsledky měření

Veličiny společné všem metodám

Při všech měřeních byl atmosférický tlak $p_A = (1,015 \cdot 10^5 \pm 0,005 \cdot 10^5)$ Pa. Údaj jsem získal z meteorologické mapy v Lidových novinách.

Tíhové zrychlení uvažujeme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Objem celé lahve jsem změřil tak, že jsem ji celou včetně pipety naplnil vodou a vodu přelil do odměrného válce. Obdržel jsem objem $V_1 = (765 \pm 4)$ ml.

Při všech následujících měřeních jsem délku h měřil metrem s přesností 1 mm. Objem W jsem odečítal ze stupnice pipety s přesností 0,1 ml.

Měření 1: odstrašující

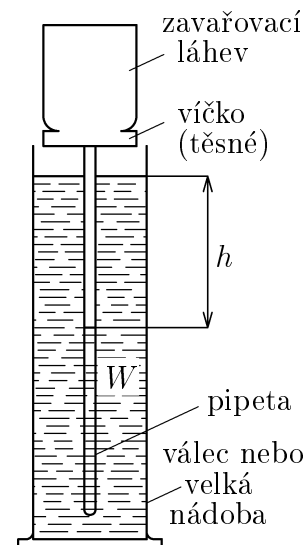
Teorie: Aparaturu sestavíme dle obr. 7. Do většího odměrného válce ponořujeme část lahve tvořenou pipetou.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
1	10,0	15,7	870	-70
2	9,4	14,5	890	-50
3	9,9	14,3	950	10
4	10,4	14,8	960	20
5	10,3	15,0	940	0
6	9,2	14,5	870	-70
7	9,7	14,5	920	-20
8	10,8	14,3	1040	100
9	10,4	14,8	960	20
10	10,6	14,2	1020	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 940 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.



Obr. 7

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 20 \text{ kg.m}^{-3}$.

Pro hustoty vody jsme tak obdrželi $\rho = (940 \pm (60 + \delta_{SYS})) \text{ kg.m}^{-3}$.

Diskuse: Po deseti měřeních jsem shledal, že jsem si vyrobil velmi citlivý plynový teploměr. Během pokusu stačilo položit teplou ruku na dno zavařovačky, načež hladina v pipetě značně poklesla. Rozdíl teplot $|T_1 - T_2|$ byl sice malý, avšak zdaleka ne zanedbatelný. Způsobil chybu přes 10%. Ostatní chyby měření (měření $h(1\%)$, měření $W(1\%)$, chyba tlaku $p_A(1\%)$ apod.) lze vzhledem k této chybě zanedbat. Jelikož při tomto měření byla láhev držena ručně, přecházelo teplo vesele z rukou do útroh lahve. Aproximace izotermickým dějem je zde proto oprávněná jen v rámci velké chyby. Povšimněte si, že hustota vody vychází menší než skutečná. Vzduch ohříváný našimi dlaněmi se totiž rozpíná a vytlačuje více vody z pipety.

Měření 2: předchlazení

Teorie: Abych mohl stlačení považovat za izotermické, pozměnil jsem trochu metodu. Chtěl jsem se vyhnout měření teploty, neboť k tomu by bylo třeba použít citlivého teploměru (desetiny °C) a uvážit teplotní rozdíly mezi různými body láhve.

První minimalizace teplotního rozdílu: Do velkého válce nebo vany nalijeme studenou vodu. Stejně studenou vodu nalijeme do kýblu. Láhev se vzduchem pak v kýblu předchládíme. Pokojová teplota je vyšší než teplota vody. Rukavicí uchopíme láhev a ponoříme ji pipetou do válce (vany). Stlačení vzduchu proběhne poměrně rychle. Díky tepelné výměně se vzduchem v pokoji se však vzduch v láhvi začne pomalu rozpínat. Proto objem W měříme ihned, jakmile skončí stlačování.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg.m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg.m}^{-3}$
1	9,2	13,8	910	-50
2	9,1	13,7	910	-50
3	9,2	13,6	930	-30
4	9,3	13,4	950	-10
5	10,4	13,9	1030	70
6	10,0	14,3	960	0
7	8,0	11,2	980	20
8	9,1	13,0	960	0
9	9,8	13,9	970	10
10	10,4	13,7	1040	80

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 970 \text{ kg.m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 40 \text{ kg.m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 10 \text{ kg.m}^{-3}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 10\%$, odtud $\sigma_{SYS} = 100 \text{ kg.m}^{-3}$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Tedy celková chyba $\sigma_{CELK} = 130 \text{ kg.m}^{-3}$.

Skutečná hodnota hustoty vody $\rho = (970 \pm 130) \text{ kg.m}^{-3}$.

Měření 3

Teorie: Druhý způsob minimalizace teplotních rozdílů: Zajistíme stejnou teplotu vzduchu v lahvi, vody ve válci (vaně) i vzduchu v pokoji. Objem W měříme, když skončí stlačování.

Naměřené hodnoty:

Měření	W/ml	h/cm	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$\Delta\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
1	10,8	13,9	1070	40
2	9,5	14,8	880	-150
3	9,2	11,7	1080	50
4	8,7	12,0	990	-40
5	8,5	11,3	1030	0
6	10,3	13,1	1080	50
7	10,1	13,0	1060	30
8	8,6	10,9	1080	50
9	10,0	13,5	1020	-10
10	9,2	12,0	1050	20

Průměrná hodnota hustoty vody $\bar{\rho} = 1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Směrodatná odchylka jednoho měření $\sigma(\rho) = 60 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka aritmetického průměru $\sigma(\bar{\rho}) = 20 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Relativní systematická chyba je $\delta_{SYS} = 10\%$. (Zdůvodnění je v celkové diskusi.)

Absolutní systematická chyba $\sigma_{SYS} = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Celková chyba $\sigma_{CELK} = 160 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Skutečná hodnota $\rho = (1020 \pm 160) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Měření 4

Teorie: Odměrný válec, do něhož jsme dosud láhev ponořovali, nahradíme podstatně větší nádobou – např. velkým sudem nebo rybníkem. Kapacita velkého vodního tělesa zaručuje, že voda svoji teplotu měnit nebude. Aby se co nejméně měnila teplota vzduchu v lahvi, tuto opět předchladíme. Ponoříme ji pak celou (nejen pipetu) a několik minut počkáme. Pokud dojde při stlačení k ohřátí vzduchu, popřípadě teplotním výkyvům způsobeným výskytem vodních par, po jisté době se díky tepelné výměně teplotní rozdíly zmírní.

Naměřené hodnoty:

Pro náročnost provedení jsem získal jen jednu hodnotu. Náročnost měření spočívala v lovení láhve ze sudu plného studené vody (o teplotě 5°C) v nevlídném jarním podnebí.

$$h = (31,1 \pm 0,2) \text{ cm}, \quad W = (23,0 \pm 0,2) \text{ ml}, \\ p_A = (1,015 \pm 0,010) \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_1 = (765 \pm 4) \text{ ml}.$$

Určili jsme tedy hustotu vody $\rho = (1030 \pm 30) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Diskuse: Soubor obsahující jednu hodnotu mnoho nevyovídá. Přesto si myslím, že děj byl ze všech měření nejvíce izotermický – díky desetiminutovému předchlazení ve velkém množství vody byly splněny všechny předpoklady pro to, aby děj byl téměř ideálně izotermický. Systematickou chybu jsem bral s jistou rezervou, neboť jsem měření provedl pouze jednou a nemá smysl počítat chybu statistickou.

Diskuse společná pro všechna měření

Při měření délky h jsme se dopustili chyby 1 mm, což odpovídá relativní odchylce $\delta_h = 0,01$.

Chyba měření objemu W byla 0,1 ml, tedy relativní chyba $\delta_W = 0,01$.

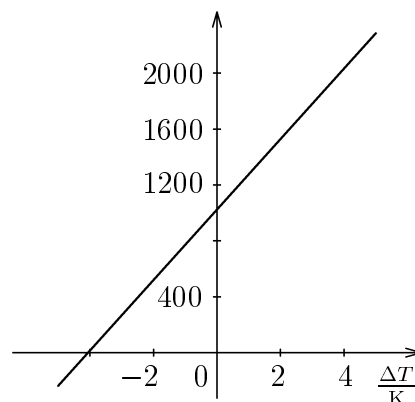
Chyba při měření celkového objemu V_1 byla 4 ml.

Tedy relativní chyba rozdílu $(V_1 - W)$ je $\delta_{(V_1 - W)} = 0,005$.

Relativní chyba použité hodnoty pro atmosférický tlak byla $\delta_{p_A} = 0,010$.

Relativní systematická chyba měření je tedy $\delta_{SYS} = \delta_h + \delta_W + \delta_{(V_1 - W)} + \delta_{p_A} + \delta_X = 4\% + \delta_X$, kde δ_X je chyba způsobená ostatními vlivy.

Protože jsme velmi účinně minimalizovali chyby plynoucí z měření délek a objemů, způsobí nám největší chybu změny teploty (s výjimkou měření 4). Uvažme jedno z provedených měření, ve kterém jsme obdrželi výsledky $h = 14,2 \text{ cm}$ a $W = 10,6 \text{ ml}$, z nichž spočteme hustotu $\rho = 1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ale za předpokladu izotermičnosti stlačování. Posuďte, jakou hustotu vody bychom z těchto údajů vypočetli, kdyby se všechn vzduch v lahvi stačil ohřát nebo ochladit o teplotu ΔT . Vidíme, že velmi malá změna teploty mohla proměnit měření ve zdrcující neúspěch. Teprve teď vidíme, jak malý teplotní rozdíl nastal během měření – maximálně $0,5^\circ\text{C}$, jelikož skoro všechny hodnoty ρ ve všech měřeních nám vyšly v intervalu $\langle 850; 1100 \rangle \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



Obr. 8

Chybu způsobenou neizotermičností děje můžeme pouze odhadnout z výsledků měření. U prvního měření (kdy jsme láhev ohřívali rukama) bude tato chyba činit 10% až 15%. U zbylých měření byla tato chyba většinou pod 10%. U měření 4 nebude rozhodně tato odchylka větší než 2%.

Na měření měly vliv ještě další jevy a skutečnosti:

- uvnitř láhve docházelo k malému vypařování vody (odtud mohlo plynout jisté ochlazování a vzestup hladiny v pipetě)
- v pipetě došlo k malé kapilární elevaci;
- láhev nebyla jistě ideálně vzduchotěsná, nicméně pro krátké několikaminutové měření těsnila dostatečně, jak jsem mnoha způsoby prověřil;
- vzduch není ideální plyn;
- vzduch uvnitř lahve má také nějakou tíhu, kterou zanedbáváme.

Všechny tyto jevy však v našem uspořádání pokusu hrály vskutku zanedbatelnou roli v růstu chyby, vzniklé teplotním rozdílem.

Závěr

V rámci chyby potvrzují všechna měření tabulkovou hustotu vody je $996 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Největší chyba byla způsobena neizotermičností děje. Její odstranění a pořízení většího souboru hodnot by patrně vyžadovalo laboratorní podmínky. Zpřesnění bychom mohli dosáhnout např. potápěním se s lahví do dvou různých hloubek, ve kterých má voda stejnou teplotu.

Filosofický závěr a poučení

Co můžeš udělat jednoduše, udělej složitě, abys po třech dnech usilovné práce dospěl k chybě jak mraky, jejichž výše hvězd se dotýká. Kéž ve vašem fyzikálním nitru probíhají jen samé izotermické děje!

Matouš Jiráček

Řešení úlohy S. 4 ... Slunce a meteoroidy (6 bodů, řešilo 45 studentů)

Abychom mohli odhadnout kinetickou energii E_k meteoroidů dopadajících na povrch Slunce, musíme si uvědomit, odkud tyto meteoroidy pocházejí. Vzhledem k tomu, že Slunce svítí dlouhou dobu, nemohou být z vnitřní části Sluneční soustavy. Jejich dráha bude podobná dráze komet. Ta je, u komet z okraje Sluneční soustavy, téměř parabolická. Budeme předpokládat, že meteoroidy dopadají na Slunce z velké vzdálenosti (nekonečna) a že na začátku měly velmi malou rychlost. Tomu odpovídá nulová celková energie E (parabolická

dráha). Pro kinetickou a potenciální energii E_p meteoroidu na povrchu Slunce tak dostáváme $E = E_k + E_p = 0$, neboli

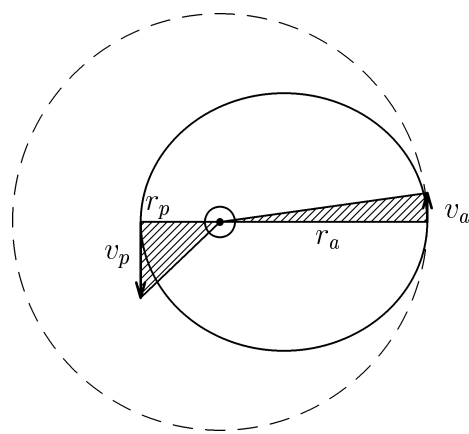
$$E_k = -E_p = \frac{\kappa m M_\odot}{R_\odot}, \quad (35)$$

kde jsme využili vztah pro potenciální energii uvedený ve 4. kapitole SNP a kde m je hmotnost meteoroidu. Pokud jsou meteoroidy jediným zdrojem energie Slunce, musí příliv jejich kinetické energie odpovídat vyzářenému výkonu L_\odot (má-li být Slunce stabilním zdrojem)

$$L_\odot = \frac{\kappa M_\odot}{R_\odot} \frac{\Delta m}{\Delta t}, \quad (36)$$

kde Δm je hmotnost meteoroidů spadlých na Slunce za čas Δt . Uvažujeme-li jeden rok (tedy $\Delta t = 3,156 \cdot 10^7$ s), dělá to $\Delta m = 6,3 \cdot 10^{22}$ kg.

Nyní se zabýváme tím, co se stane se Zemí, změní-li se hmotnost Slunce skokově o tuto hodnotu. Na začátku obíhá Země kolem Slunce po kružnici o poloměru a kruhovou rychlostí $v_k = \sqrt{\kappa M_\odot/a}$. Zvětší-li se hmotnost Slunce, pak tato rychlost už nebude dostatečná k tomu, aby Země dále obíhala po kružnici. Země se začne pohybovat po elipse, v jejímž ohnisku bude Slunce. V místě, kde se nachází Země v okamžiku změny hmotnosti Slunce, se pak bude nacházet afélium (jediné dva body na eliptické dráze, kdy je průvodič kolmý na směr rychlosti planety, odpovídají perihéliu a aféliu, viz obr. 9). Známe tedy polohu r_a a rychlost v_a Země v aféliu: $r_a = a$, $v_a = v_k$. Abychom určili velkou poloosu a' nové elipsy, stačí najít vzdálenost r_p perihélia od Slunce. Tu určíme ze zákona zachování energie a z II. Keplerova zákona:



Obr. 9

$$\frac{1}{2}v_p^2 - \kappa \frac{M_\odot + \Delta m}{r_p} = \frac{1}{2}v_a^2 - \kappa \frac{M_\odot + \Delta m}{r_a}, \quad (37)$$

$$r_p v_p = r_a v_a.$$

Jak již bylo řečeno, jsou rychlosti v_a , v_p v aféliu a perihéliu kolmé na průvodič. Za malý čas dt tedy průvodič opiše malý pravoúhlý trojúhelník o ploše $S_a = r_a v_a dt/2$ a $S_p = r_p v_p dt/2$. Z těchto dvou rovnic vyloučíme v_p , pro r_p tak dostaneme kvadratickou rovnici. Jedno její řešení je $r_p = r_a = a$. To však není zajímavé, neboť odpovídá počáteční poloze. Druhé řešení má tvar: $r_p = a M_\odot / (M_\odot + 2\Delta m)$. Pro změnu velké poloosy tak dostáváme:

$$\Delta a = a' - a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) - a = \frac{1}{2}(r_p - a) = -a \frac{\Delta m}{M_\odot + 2\Delta m} \approx -a \frac{\Delta m}{M_\odot}. \quad (38)$$

Číselně pak $\Delta a = -4,8$ km, což je změna, které bychom si určitě všimli.

Pro výpočet změny oběžné doby použijeme III. Keplerův zákon. Protože se však mění hmotnost centrálního tělesa, musíme použít jeho obecnější verzi: $\kappa M T^2 = 4\pi^2 a^3$. V našem případě

$$\kappa(M_\odot + \Delta m)(T + \Delta T)^2 = \kappa M_\odot \left(1 + \frac{\Delta m}{M_\odot}\right) T^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2 \approx$$

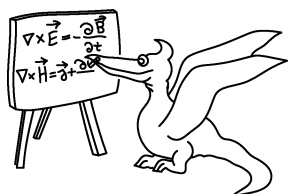
$$\approx \kappa M_\odot T^2 \left(1 + \frac{\Delta m}{M_\odot} + 2\frac{\Delta T}{T}\right) = 4\pi^2(a + \Delta a)^3 \approx 4\pi^2 a^3 \left(1 + 3\frac{\Delta a}{a}\right), \quad (39)$$

kde jsme použili přibližný vztah uvedený v zadání a zanedbali člen s $\Delta m \Delta T$, neboť obsahuje součin dvou relativně malých čísel (vůči M_\odot a T). Samozřejmě toto zjednodušení není nutné provádět, výsledný vztah však bude o trochu složitější. Nyní už není těžké vyjádřit změnu oběžné doby Země kolem Slunce:

$$\Delta T \approx \frac{T}{2} \left(3 \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta m}{M_\odot} \right) \approx -2 \frac{\Delta m}{M_\odot} T, \quad (40)$$

číselně $\Delta T = -2,0$ s.

Alexander Kupčo



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Modely hvězd II

Víme, že hvězdy čerpají energii z termojaderných reakcí. Aby hvězda svítila dostatečně dlouho beze změny, musí platit **podmínka energetické rovnováhy**. Ta vyjadřuje rovnost výkonu uvolněného při jaderných reakcích a výkonu přeneseného od středu k povrchu hvězdy. Potřebujeme tedy znát způsob přenosu energie uvnitř hvězdy. V dostatečně horké a husté látce probíhá tzv. **zářivý přenos energie**, při kterém se každý foton mnohokrát pohltí a znovu vyzáří, než se dostane z oblasti s vysokou teplotou do oblasti s nízkou teplotou. Energie se šíří prostřednictvím fotonů. Předpokládejme, že foton projde v látce mezi vyzářením a pohlcením průměrnou vzdálenost d (tzv. střední volná dráha fotonu).

Každá vrstva látky září jako absolutně černé těleso, tj. podle Stefan-Boltzmannova zákona se z jednotkové plochy za jednotku času vyzáří energie

$$I = \sigma T^4, \quad (41)$$

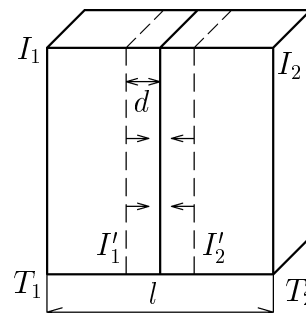
kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Nechť teplota látky klesne na úseku délky l v radiálním směru z T_1 na T_2 a hustota zářivého výkonu z I_1 na I_2 . Zkusme zjistit, jaký je tok energie H přes jednotkovou plochu postavenou uprostřed tohoto úseku (viz obr. 10). Přes tuto plochu prochází záření jakoby z vrstev, které jsou od ní ve vzdálenosti d , takže výsledný tok energie bude $H = I'_1 - I'_2$, kde I'_1 a I'_2 jsou hustoty zářivého výkonu těchto vrstev. Na malých vzdálenostech (a délku l budeme považovat za malou) můžeme pokles zářivého výkonu považovat za lineární, takže

$$I'_1 - I'_2 = 2d(I_1 - I_2)/l \approx d(I_1 - I_2)/l. \quad (42)$$

Pro výkon pak platí

$$H \approx \sigma \frac{d}{l} (T_1^4 - T_2^4). \quad (43)$$

Nechť je v jednotce objemu n_0 částic, které pohlcují fotony. Každá částice se jeví jako terčík s plochou σ_f (tzv. účinný průřez). Představme si hranol hvězdné látky s čelní plochou



Obr. 10

S a s délkou x . Tento hranol obsahuje Sxn_0 částic. Při čelním pohledu je plocha S_t , kterou pro fotony zakrývají částice v hranolu, rovna $S_t = Sxn_0\sigma_f$. Střední volná dráha fotonu pak odpovídá takové délce hranolu, při které částice vyplní celou čelní plochu ($S_t = S$), neboli

$$d = \frac{1}{\sigma_f n_0}. \quad (44)$$

Zanedbáme, že uvnitř Slunce ve vrstvě těsně pod povrchem probíhá přenos energie prouděním. Pak za l ve vztahu (43) dosadíme R_\odot a zanedbáme povrchovou teplotu $T_2 = 6000$ K vůči teplotě $T_1 = T_c$ ve středu. Zářivý výkon L_\odot se rovná součinu přeneseného výkonu a povrchu hvězdy

$$L_\odot \approx 4\pi R_\odot^2 H \approx R_\odot^2 \sigma \frac{d}{R_\odot} T_c^4 = \sigma d R_\odot T_c^4. \quad (45)$$

Teplota Slunce je přibližně $T_c = 10^7$ K a při střední hustotě Slunce (5.4) se pak střední volná dráha fotonu rovná asi $d = 4$ mm. Po dosazení získáme výkon $L_\odot = 2,10^{27}$ W, což se zase až tak moc od skutečného výkonu $L_\odot = 3,83 \cdot 10^{26}$ W neliší.

Předpokládejme, že částicemi, které pohlcují fotony jsou volné elektrony. Hustota těchto terčíků se řádově shoduje s celkovou hustotou částic $\bar{n} \approx M_\odot / (m_p R_\odot^3)$, kde m_p je hmotnost protonu (což je ionizovaný vodík, který tvoří většinu hmoty Slunce). Po dosazení tohoto vztahu do (44) dostaneme $d \approx m_p R_\odot^3 / (\sigma_f M_\odot)$. Předpokládejme navíc, že účinný průřez je konstantní. Použijeme-li ještě vztah pro centrální teplotu (5.8) z minulé kapitoly seriálu, máme pro celkový zářivý výkon Slunce vztah:

$$L_\odot \approx \sigma \frac{m_p R_\odot^3}{\sigma_f M_\odot} R_\odot \left(\frac{\kappa M_\odot}{R_\odot} \frac{m_p}{k} \right)^4 = \frac{\sigma \kappa^4 m_p^5}{\sigma_f k^4} M_\odot^3 = \text{konst } M_\odot^3. \quad (46)$$

Tato závislost zářivého výkonu na hmotnosti vyplývá taktéž z pozorování. Je tedy vidět, že i kvalitativní úvahy nás dovedly ke správným výsledkům.

Podívejme se teď, co nám (46) říká o vztahu mezi absolutní magnitudou M_a a hmotností hvězdy M . Použijeme-li Pogsonovu rovnici (viz 1. kapitola SNP) pro naši hvězdu posunutou do vzdálenosti $r = 10$ pc (světelný tok $\Phi = L / (4\pi r^2)$) a pro nějakou referenční hvězdu o jasnosti m_0 (tok Φ_0), obdržíme $M_a - m_0 = 2,5 \log(4\pi r^2 \Phi_0 / L)$. Po úpravě získáme $M_a = A - 2,5 \log L$, kde A je konstanta, kterou určíme z pozorování. Využijeme-li (46) dostaneme $M_a = A - 7,5 \log M$, neboli

$$\log M = A' - 0,13 M_a. \quad (47)$$

Úměrnost zářivého výkonu hvězdy třetí mocnině její hmotnosti vede ke koeficientu $-0,13$, v literatuře se uvádí

$$\log(M/M_\odot) = 0,56 - 0,12 M_a. \quad (48)$$

Úloha S. VI ... *hmotnost hvězd a tak*

- Určete, jak závisí doba života hvězdy na její hmotnosti.
- Vztah (48) nám dovoluje určovat vzdálenosti dvojhvězd a hmotnosti jejich složek. Jako příklad může sloužit dvojhvězda 70 Oph. Měřením bylo zjištěno, že oběžná doba složek dvojhvězdy je $T = 87,85$ roku, velká poloosa jejich dráhy má na obloze úhlovou délku $a = 4,551''$. Zdánlivé magnitudy složek jsou $m_A = 3,93$, $m_B = 5,29$. Z těchto údajů vypočtete vzdálenost systému a hmotnosti jednotlivých složek.

**Naše adresa: FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha**